

I. Differenciálszámítás

Differenciahányados, differenciálhányados, szelő, érintő

1. Ábrázoljuk az $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt! Írjuk fel a grafikon alábbi két pontján átmenő szelő egyenletét!

a) $(1, 1)$, $(2, 8)$ b) $(1, 1)$, $(-1, -1)$ c) $(1, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)$ d) $(1, 1)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{64}{27}\right)$

2. Határozzuk meg az előző feladatban a grafikon $P(1; 1)$ pontbeli érintőjének az egyenletét, és igazoljuk, hogy az érintőnek a P ponttól különböző közös pontja is van a függvénygörbével!

3. Számítsuk ki az adott függvény adott x_0 pontbeli differenciálhányadosát.

$x_0 = 3$ $f(x) = x^2$ $x_0 = 1$ $f(x) = x^2$ $x_0 = 4$ $f(x) = 2x$ $x_0 = 3$ $f(x) = x$

4. Számítsuk ki a függvénygörbéhez húzott érintő meredekségét a megadott abszcisszájú pontban.

$x_0 = 2$ $f(x) = 2x^2$ $x_0 = 6$ $f(x) = x^2 + 3$ $x_0 = 4$ $f(x) = x^3$

5. Határozd meg az érintő meredekségét, majd egyenletét a függvénygörbék megadott pontjaiban.

a) $y = x^2$ $P(3, 9)$ b) $y = x^3$ $P(-1, -1)$ c) $y = x^2 + x^3$ $P(1, 2)$ d) $y = \frac{12}{x}$ $P(2, 6)$

6. Írjuk fel az $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény $x_0 = 2$ pontbeli differenciálhányadosát! Határozzuk meg a görbe $x_0 = 2$ pontjában a görbéhez húzható érintő egyenletét!

7. Írjuk fel az $f(x) = 5x^2$ függvény $x_0 = 2$ pontbeli differenciálhányadosát! Határozzuk meg a görbe $x_0 = 2$ pontjában a görbéhez húzható érintő egyenletét!

8. Oldjuk meg az előző feladatot, ha $f(x) = x^4$ és $x_0 = 1$.

9. Határozzuk meg az $y = \frac{2}{x}$ egyenletű hiperbola $P(2; 1)$ pontjában a hiperbolához húzható érintő egyenletét!

10. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x}$ egyenletű görbe $x_0 = 9$ abszcisszájú pontjában a görbéhez húzható érintő meredekségét, majd egyenletét! Mely pontokban metszi az érintő a koordináta-rendszer tengelyeit?

11. Az $y = x^2$ egyenletű parabola melyik pontjában húzott érintő párhuzamos az $y = 6x - 1$ egyenletű egyenesrel?

12. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ egyenletű görbe $x_0 = 3$ abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét!

13. Az $y = x^3 + 1$ egyenletű görbe melyik pontjában húzott görbeérintő merőleges az $x + 12y = 5$ egyenletű egyenesre?

14. Az $y = 0,5x^2$ egyenletű parabola melyik pontjában húzott érintő merőleges az $y = 2x - 1$ egyenletű egyenesre?

15. Az $y = x^2$ egyenletű parabola melyik pontjában húzott érintő párhuzamos az $y = \frac{1}{4}x - 3$ egyenletű egyenesrel?

16. Határozzuk meg az $y = 0,5x^2 - 1$ és az $y = -2x^2 + 9$ egyenletű parabolák metszéspontjában a parabolákhoz húzott érintők hajlásszögét!

17. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{2}x^2$ és az $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ egyenletű parabolák metszéspontjában a parabolákhoz húzott érintők egyenletét és ezek hajlásszögét!

18. Adj példát olyan függvényre, amely valamely b valós számra értelmezve van b egy környezetében, de nem differenciálható b -ben.

19. Határozzuk meg b értékét úgy, hogy az $y = -2x + b$ egyenes érintse az $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ függvényt.

20. Határozzuk meg b értékét úgy, hogy az $y = 48x - b$ egyenes érintse az $f(x) = x^3$ függvényt.

21. Számítsuk ki az adott függvény adott x_0 pontbeli differenciálhányadosát.

a) $x_0 = -7$ $f(x) = -2x + 1$ b) $x_0 = 2$ $f(x) = 3x^2 - 5$ c) $x_0 = -2$ $f(x) = \sqrt{x+3}$

22. Számítsuk ki az adott függvény adott x_0 pontbeli differenciálhányadosát.

a) $x_0 = -8$ $f(x) = 3x - 2$ b) $x_0 = +3$ $f(x) = 2\sqrt{x}$ c) $x_0 = 0$ $f(x) = \frac{1}{x+2}$

d) $x_0 = 6$ $f(x) = 20x^3 - 21$ e) $x_0 = 4$ $f(x) = x^2 - 2x^2$

23. Határozd meg az érintő egyenletét a függvénygörbe megadott pontjában:

$f(x) = 2x^2 - x + 3$ $x_0 = 3$ $x_0 = -9$ $f(x) = -x^3 - 2x$

24. Írjuk fel az $f(x) = \frac{x+7}{1+x^2}$ függvény érintőjét a $(3, 1)$ pontban.

25. Mekkora a $y = x^2$ és az $y = \sqrt[3]{x}$ függvénygörbék $(1, 1)$ pontban húzott érintőinek hajlásszöge?

26. Írjuk fel az $y = 2x^3 + 3x^2 - 10x + 7$ függvénygörbe $y = 2x + 90$ egyenessel párhuzamos érintőit.

27. Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \cos x$ függvényeket. Írjuk fel az $f(x)$ görbéjéhez az $x - 2y = 0$ egyenletű egyenessel párhuzamos érintő egyenletét.

28. Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola átmegy az origón, és az $E(3, 6)$ pontjához húzott érintő meredeksége -4 . a) Írjuk fel a parabola egyenletét. b) Adjuk meg a parabola iménti érintőjének egyenletét.

29. Az $f(x) = \frac{x^2}{4}$ parabola $x = 4$ helyhez tartozó érintője a parabola vezéregyenesét a P pontban metszi. a) Határozza meg a P pont koordinátáit! b) A parabola mely pontjára teljesül még, hogy az ottani érintő ugyancsak P -ben metszi a vezéregyeneset? c) Igazolja, hogy az előbbi két érintő merőleges egymásra!

30. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 - x + 6$ függvény, valamint a $g(x) = f'(x) - f(x) + 5$ függvény. Van-e olyan x_0 hely, ahol az $f(x)$ és $g(x)$ függvények érintői párhuzamosak?

31. Egy meghibásodott katonai műhold mozgását egy órán keresztül figyelték a szakemberek. A műhold Földtől való távolságát a megfigyelés kezdetétől az alábbi $f(x)$ függvény írja le (az egység az x tengelyen: 6 perc, az y tengelyen 1500 méter):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 10, & \text{ha } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 8, & \text{ha } x > 3 \end{cases} \quad \text{a) Milyen magasan volt a műhold a megfigyelés kezdetekor?}$$

b) A megfigyelés 30. percének végén végleg elromlott a műhold vezérlése, ekkortól kezdve a földtől való távolságát $f(x)$ érintője szemlélteti. Mikor csapódott a műhold a földbe?

32. a) Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű parabola $P(-1, 1)$ és $Q(x, x^2)$ pontjain átmenő szelő iránytangensét! b) Határozzuk meg a parabola $P(-1, 1)$ pontjában a parabola érintőjének az egyenletét!

33. Az $y = x^3 - x^2$ egyenletű görbe $x = 1$ abszcisszájú pontjában a görbéhez húzott érintőre merőleges e egyenest állítunk. Határozzuk meg az e egyenes egyenletét!

34. Az $y = x^3 - x^2$ egyenletű parabola $(1; 0)$ koordinátájú pontjában a parabolához e érintőt húzunk. Mely pontokban metszi az érintő a koordináta-rendszer tengelyeit? Az $(1; 0)$ pontban az e érintőre merőleges f egyenest állítunk. Mely pontokban metszi az f egyenes a parabolát?

35. a) Írjuk fel a szinusz- és a koszinuszfüggvények görbéihez húzható érintők egyenletét az $x_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ pontokban! b) Van-e inflexiós pontja a két függvénynek? Ha igen, mely pontokban?

36. Az $y = x^2 + 4x + 3$ egyenletű parabola melyik pontjához tartó parabolaérintő megy át a $P(3; 4)$ ponton?

37. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekben a görbéhez húzott érintők párhuzamosak az x tengellyel!

38. Adjuk meg azokat a helyeket, ahol az $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 5x + 1, x \in \mathbb{R}$ függvény differenciálhányadosa 0!

39. Adjunk meg olyan függvényeket, amelyeknek a differenciálhányadosa az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 3$ helyeken 0!

40. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ függvény grafikonjának az $x = 1$ abszcisszájú pontjában a görbéhez húzott érintő egyenletét!

41. Egy másodfokú függvény három érintője: $y = -x - 1,5 \quad y = 2x - 8 \quad y = -3x - 0,5$. Határozzuk meg a függvényt.

42. Számítsuk ki az adott függvény adott pontbeli differenciálhányadosát:

$$x_0 = -8 \quad f(x) = 3x - 2 \qquad x_0 = 1 \quad f(x) = 6x^2 + 2x - 4 \qquad x_0 = 3 \quad f(x) = 2\sqrt{x}$$

$$x_0 = -2 \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 \qquad x_0 = -0 \quad f(x) = \frac{1}{x+2}$$

43. Írjuk fel a függvény adott pontbeli érintőjének egyenletét:

$$x_0 = 3 \quad f(x) = 2x^2 - x + 3 \quad x_0 = -1 \quad g(x) = -(x + 3)^2 + 3$$

$$x_0 = 4 \quad h(x) = \frac{2}{x} - 2 \quad x_0 = 4 \quad i(x) = 3\sqrt{x}$$

44. Adjuk meg a differenciálhányados definíciója szerint a függvény deriváltfüggvényét az értelmezési tartományon. Ábrázoljuk a függvényt és a deriváltját ugyanabban a koordinátarendszerben.

$$f(x) = 2(x - 1)^2 + 1 \quad g(x) = x^2 - 3x + 3 \quad h(x) = \frac{2}{x+2} + 2$$

$$i(x) = \sqrt{x-1} + 1$$

Műveletek differenciálható függvényekkel

45. A deriválási szabályokat alkalmazva határozzuk meg a függvények deriváltját:

$$b(x) = 3x - 2 \quad c(x) = 2x - 1 \quad d(x) = -x^3 + 3x - 2$$

$$e(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \quad f(x) = 4x^{-3} - 5x^{-2}$$

46. Deriváljuk a következő trigonometrikus függvényeket:

$$a(x) = \sin x + 2 \quad b(x) = 3 \cos x \quad c(x) = \sin x + \cos x \quad d(x) = 4 \sin x - \cos x$$

$$e(x) = -\sin x + 5 \cos x$$

47. A szorzatfüggvényre vonatkozó szabály alapján számítsd ki a következő függvények deriváltját.

$$a(x) = 2x^3 \cdot x^2 \quad b(x) = x^6 \cdot x^7$$

$$c(x) = (2x + 3)(2x - 1) \quad d(x) = (x + 4)(x^2 - 2) \quad e(x) = (3x^2 - 5)(x^2 + 3x)$$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)(2x - 2)$$

48. A hányadosfüggvényre vonatkozó szabály alapján számítsd ki a következő függvények deriváltját.

$$a(x) = \frac{x^8}{2x^5} \quad b(x) = \frac{5x^5}{x^8} \quad c(x) = \frac{x^2+3}{x} \quad d(x) = \frac{x^2+6x+9}{3x} \quad e(x) = \frac{3x^3-4x^2}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{2x-5}{x^3} \quad g(x) = \frac{3x^2+8}{12x^3}$$

49. Deriváljuk a következő függvényeket:

$$a) f(x) = 3\sqrt[3]{x} \quad b) f(x) = x\sqrt{x} \quad c) f(x) = \frac{1}{x^2} \quad d) f(x) = (x^2 - 2)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$e) f(x) = (2x^3 - 5x + 6)(x^2 - 3x + 8) \quad f) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

50. Melyik az a függvény, amelynek a deriváltja:

$$a) f'(x) = 2 \quad b) f'(x) = 2x - 3 \quad c) f'(x) = x^2 - 1 \quad d) f'(x) = x^2 - 3x + 1$$

51. Deriváljuk a következő függvényeket!

a) $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$	e) $f(x) = \frac{1}{\frac{1-x}{x+1}}$	i) $f(x) = \sin^2 3x$
b) $f(x) = \cos 2x$	f) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$	j) $f(x) = (\ln x)^3$
c) $f(x) = \frac{1}{2x^2+2x+5}$	g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-3x}$	k) $f(x) = \log_2 x$
d) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$	h) $f(x) = \sin^4 x$	

52. Deriváljuk az $f + g$, $f - g$ és a $g - f$ függvényeket.

a) $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$
 b) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
 c) $f(x) = 4x^5 - 3x^4 + x^2 - x + 6$, $g(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 5x + 1$

53. Deriváljuk: $f(x) = \frac{x^2}{2x-8}$, $g(x) = \frac{5x+1}{2x-x^2}$ $h(x) = \frac{3}{x^3+4x+1}$ $i(x) = \frac{2x-x^2}{2x^2-8}$

54. Határozzuk meg a függvények első, második és harmadik deriváltját.

a) $f(x) = \cos x$ b) $f(x) = 4x^5 + 5x^4$ c) $f(x) = e^x$ d) $f(x) = \cos^2 x$
 e) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$
 f) $f(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x + 3$ g) $f(x) = (x+5)(3x^2 - 5x + 2)$

55. Határozzuk meg a függvények negyedik deriváltját.

f) $f(x) = \sin x$ g) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$
 h) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ i) $f(x) = \frac{2x^6 - 6x^3 + 2x^2}{x}$ j) $f(x) = 3 \sin x - 5 \cos x$

56. A deriválási szabályokat alkalmazva határozzuk meg a következő függvények deriváltjait:

a) $a(x) = 2x - 1$;	b) $b(x) = -3x + 2$;
c) $c(x) = \sqrt{3}x$;	d) $d(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$;
e) $e(x) = 2x^2 + 1$;	f) $f(x) = x^2 - 6x$;
g) $g(x) = -3x^2 + 7x + 9$;	h) $h(x) = \sqrt{7}x^2 - \frac{3}{5}x + \pi$;
i) $i(x) = 2x^3 - 3x^2$;	j) $j(x) = -x^3 + 3x - 2$;
k) $k(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$;	l) $l(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + x + 1$

57. Írjuk át a függvényeket hatvány alakba, majd deriváljuk őket, és a deriváltakat írjuk fel újra gyökös, illetve tört formában:

a) $a(x) = \sqrt{x} - 3;$	b) $b(x) = 5\sqrt{x};$	c) $c(x) = 3\sqrt{7x};$
d) $d(x) = 10 \cdot \sqrt[5]{x};$	e) $e(x) = 2 \cdot \sqrt[4]{5x};$	f) $f(x) = \frac{5}{3}x \cdot \sqrt{x^3};$
g) $g(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[3]{x^8} - \sqrt{x^7};$	h) $h(x) = \sqrt[7]{5\sqrt{x^6}};$	i) $i(x) = \frac{1}{x} + 5;$
j) $j(x) = \frac{5}{x};$	k) $k(x) = \frac{2}{3x};$	l) $l(x) = \frac{x+3}{x};$
m) $m(x) = \frac{7}{x} + 5\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2x}\right);$	n) $n(x) = \frac{1}{x^2};$	o) $o(x) = -\frac{x^4 - 2}{x^3};$
p) $p(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}.$		

58. Deriváljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

a) $a(x) = \sin x + 2;$	b) $b(x) = 3\cos x;$
c) $c(x) = \sin x + \cos x;$	d) $d(x) = 4\sin x - \cos x;$
e) $e(x) = -\sin x + 5\cos x;$	f) $f(x) = -\cos x - \pi \sin x;$
g) $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x;$	h) $h(x) = 3\sin x + 4\cos x - \sqrt{2} \sin x$

59. Deriváljuk a következő exponenciális és logaritmusfüggvényeket

a) $a(x) = 3^x;$	b) $b(x) = 4 \cdot 5^x;$
c) $c(x) = 2^{3x};$	d) $d(x) = 3e^x;$
e) $e(x) = 7^x - (3x)^4 + 2^{2x} - 4^{3x};$	f) $f(x) = 4\ln x;$
g) $g(x) = \log_2 x;$	h) $h(x) = 5\lg x;$
i) $i(x) = 7\log_5 x;$	j) $j(x) = 6\ln x - 3\log_3 x$
k) $k(x) = \frac{1}{2}\ln x.$	

60. A szorzásra és a hányadosra vonatkozó differenciálási szabályok szerint deriváljuk a következő függvényeket:

a) $a(x) = x^4 \cdot \sqrt[5]{x};$	b) $b(x) = (x^3 + 2x)(x^7 - 3x^5 + 5x^2)$
c) $c(x) = \frac{4x^5 + 5x^{3,6} - 2x^2}{5x^{10} - 3x^6 - 9x^2};$	d) $d(x) = \frac{4x^2 + x^{0,6}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt{x^5}};$
e) $e(x) = x^3 \cdot \sin x;$	f) $f(x) = \sin x \cdot \cos x;$
g) $g(x) = \operatorname{tg} x;$	h) $h(x) = \operatorname{ctg} x;$
i) $i(x) = x \cdot \ln x;$	j) $j(x) = \frac{\ln x}{x}.$

Függvényvizsgálat és -ábrázolás

61. Határozzuk meg, hogy a következő függvényeknek hol van minimuma, és az mennyi!

$$a(x) = 2x^2 - 10x + 5$$

$$b(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x + 1$$

$$c(x) = x^7 - x^5$$

$$d(x) = \sin x \cdot \cos x$$

62. Hol és milyen szélsőértéke van a következő függvényeknek?

$$a(x) = 3x^2 - 4x + 2 \quad b(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$c(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad d(x) = 2 \sin x - \cos x$$

63. Határozzuk meg deriváltak segítségével az adott függvények monotonitási viszonyait.

$$a(x) = 8x + 2$$

$$b(x) = x^2 - 2x + 8$$

$$c(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 5$$

65. Döntsük el, hogy van-e inflexiós pontjuk a függvényeknek a megadott helyeken.

$$a(x) = 12x^2 - 5x + 3 \quad x_0 = 4, \quad b(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \quad x_0 = -1,$$

$$c(x) = \operatorname{tg} x \quad x_0 = 0, \quad d(x) = x^{10} - x^8 \quad x_0 = 0$$

66. Határozzuk meg a következő függvények inflexiós pontjait. Adjuk meg, mely intervallumokon konvexek, melyeken konkávak a függvények.

$$a(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 6$$

$$b(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2$$

$$c(x) = \frac{x^6}{30} + \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{6}$$

$$d(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$$

67. Függvényvizsgálat és -ábrázolás: $a(x) = 5x^3 - 4x^4$

$$b(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$c(x) = 3x^3 - 6x$$

$$d(x) = 3x^3 + 5x^2 + 1$$

68. Függvényvizsgálat és ábrázolás: $a(x) = x^2 - x + 2$

$$b(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$c(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$d(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

69. Ábrázoljuk: a) $y = \sqrt{x} - x$

$$b) y = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

70. Van-e inflexiós pontja az $f(x) = x^4 - 6x^2$ függvénynek -2 -ben, 0 -ban és 1 -ben?

71. Teljes függvényvizsgálat: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 3x - x^3$

$$f(x) = 2x^2 - x^4$$

72. Írjuk le a következő függvények menetét, és vázoljuk a függvények grafikonját!

$$a) f(x) = x^3 - 12x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$b) f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 16, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$d) f(x) = x^5 - x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f) f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

73. Határozzuk meg, mely intervallumokon konvex, melyeken konkáv a következő egyenletű görbe.
 $y = 5x^3 + 4$ $y = x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ $y = x^5 + 5x + 4$ $y = x^5 + 5x^4 + 4$

74. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk a függvényt.

$$f(x) = 9x^2 - 5x - 3$$

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$f(x) = 2x^2 - x^4$$

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 5$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x$$

75. Hol és milyen szélsőértéke van ezeknek a függvényeknek? $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$h(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$i(x) = 2\sin x - \cos x$$

76. Határozzuk meg a következő függvények inflexiós pontjait. Adjuk meg, mely intervallumokon konvexek, mely intervallumokon konkávak függvények.

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 6$$

$$g(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2$$

$$h(x) = \frac{x^6}{30} + \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{6}$$

$$i(x) = 2\sin x - 3\cos x$$

77. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő folytonos függvényeknél! Állapítsuk meg az értelmezési tartományt, a zérushelyeket (ahol lehet), a paritást, a periodikusságot, a folytonosságot, a szakadási helyeket, a határértékeket, a szélsőértékek minőségét, helyét és értékét, a monotonitási viszonyokat, az inflexiós pontok helyét és értékét, a konvexitási viszonyokat és az értékkészletet. Ábrázoljuk a vizsgálat alapján a függvényeket.

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$h(x) = x^3 - 4x$$

$$i(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$$

$$j(x) = x^5 - x^3$$

$$k(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

78. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő függvényeknél! Ábrázoljuk a vizsgálat alapján a függvényeket.

$$f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$g(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

$$h(x) = \cos x (2\sin x - 1)$$

$$i(x) = x \ln x$$

$$j(x) = \frac{e^x}{x}$$

Szélsőértékfeladatok

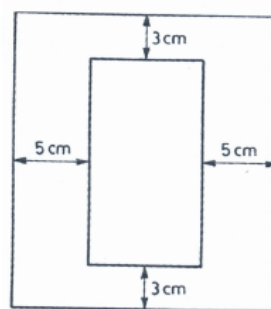
79. Két szám összege 20. Négyzeteik összege mikor a legnagyobb?

80. Egy téglalap egyik oldalához kifelé egy félkört írunk, majd a félkör és a téglalap közös határoló szakaszát elhagyjuk. A téglalap és a félkör együttes területe 1 m^2 . Mekkora legyenek a téglalap oldalai, hogy az alakzat kerülete a lehető legkisebb legyen?

81. Az 1 dm^3 térfogatú forgáshengerek közül a legkisebb felszínűnek mekkora a sugara?

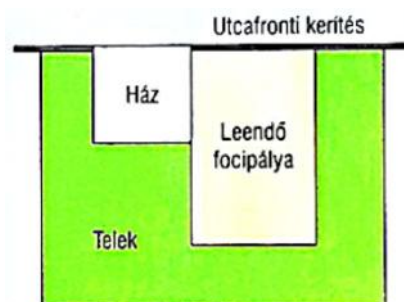
82. A 20 cm alkotójú forgáskúpok közül a legnagyobb térfogatúnak mekkora a sugara?
83. Egyenes körkúpot készítünk, amelynek palástját egy egységsugarú körből vágtuk ki. Mekkora a kúp alapkörének sugara, ha a kúp térfogata maximális?
84. Osszuk fel a 4-et két pozitív részre úgy, hogy az egyik rész négyzetének és a másik rész köbének az összege minimális legyen!
85. Négyzet alakú bádoglemez oldala 5 dm. A sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le. A megmaradó részből dobozt készítünk. Mekkora legyen a levágott négyzetek oldalát, hogy a doboz térfogata maximális legyen?
86. Egy négyzet alapú, 300 dm^3 térfogatú, felül nyitott tartályt akarunk építeni. Az alaplapp dm^2 -enként 800 forintba, az oldallapok dm^2 -enként 600 forintba kerülnek. Hogyan kell a négyzetes hasáb méreteit megválasztani, hogy az előállítási költség minimális legyen?

87. Könyvet készítenek. Egy-egy oldalon 60 cm^2 nyomtatott szövegnek kell lennie. Mindkét oldalon 5 cm-es, alul és felül 3 cm-es margót hagynak. Milyen hosszú legyen egy nyomtatott sor, ha minél kevesebb papírt akarunk felhasználni?



88. Egy gazda 1 ha területű, téglalap alakú telket akar bekeríteni. A kerítés AB és CD oldala méterenként 600 forintba, a BC és AD oldala méterenként 1000 forintba kerül. Milyen hosszúak legyenek a téglalap oldalai, hogy a kerítés költsége minimális legyen?
89. Egy derékszögű háromszög átfogója 50 cm hosszúságú. Határozzuk meg a két befogót úgy, hogy a háromszög kerülete maximális legyen.

90. Liver Pál gyerekkora óta nagyon szeret focizni. Kisiskolás volt, amikor édesapja vásárolt 150 m dróthálót. A hálóval egy focipályát keríthettek le az udvartól úgy, hogy felhasználják a telek kerítését és a 25 m hosszú házfalat. Mekkora legyenek a pálya méretei, ha a lehető legnagyobb területű pályát akarják kialakítani? (A ház falára és az utcafronti kerítésre — ami gyakorlatilag tetszőlegesen hosszúnak tekinthető — nem húznak ki hálót.)



91. Gáz Géza hivatásos partibiciklista, a cégének több különböző hosszúságú tandem kerékpárja van. Legújabb megbízása egy viszonylag szűk, 2,5 m széles utcába szól, ahová csak egy arra merőleges, 4 m széles utcából lehet behajtani. Legfeljebb hány üléses kerékpárral induljon, hogy be tudjon kanyarodni az utcában. A kihajtás már nem okoz gondot, mert egy hatsávós sugárútra kell kifordulni. Egy főre átlagosan másfél méter kerékpárt lehet számítani,



92. A 30 cm átmérőjű pizza alapját készítéskor négy egyforma részre vágják. Feltétnek minden szeletre egy téglalap alakú felvágottat tesznek úgy, hogy a felvágott két sarka a köríven legyen, két sarka pedig a két határoló sugarára essen. A felvágott egyik éle párhuzamos a pizzaszelet szimmetriatengelyével.

- a) Mekkora lehet a legnagyobb területű felvágott, amelyet ebben a formában erre a pizzára sütnék?
 b) Határozzuk meg a felvágott méreteit, ha pizzát nem négy hanem n egybevágó részre osztják, és úgy tesznek minden szeletre egy téglalap alakú felvágottat.

Vegyes feladatok

93. A $[-3, 3]$ intervallumon értelmezett $y = 9 - x^2$ parabolát megforgatjuk az y tengely körül, így egy forgásparaboloidot kapunk. Ebbe egy maximális térfogatú hengert írunk. Mekkora a henger sugara?

94. Az $y = x^2$ görbe mely pontjára igaz, hogy a P -beli érintő, a P -ből az x tengelyre bocsátott merőleges és az x tengely határolta háromszög területe 16?

95. Számítsuk ki az $s(t) = \frac{1}{4}t^2$, $t \geq 0$ útfüggvény szerint mozgó test pillanatnyi sebességét a $t_0 = 5$ időpillanatban!

96. Igazoljuk, hogy a normálpárabola x_1 és x_2 abszcisszájú pontjaiban a parabolához húzható érintők a $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_1x_2\right)$ pontban metszik egymást!

97. Az $y = x^2 + bx + c$ egyenletű parabola a $P(4; -2)$ pontban érinti az $x - 2y = 8$ egyenletű egyenest. Határozzuk meg a b és a c értékét!

98. A $4x - 9y = 0$ egyenletű egyenes az első síknegyedben érinti az $y = \frac{x^3}{3} + c$ egyenletű görbét. Határozzuk meg a c értékét!

99. Igazoljuk, hogy az $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ függvény deriváltja mindenütt pozitív! Mit mondhatunk a függvény menetéről?

100. Határozzuk meg az összetett függvény deriváltfüggvényét: $f(x) = \ln(3x - 1)$

101. Határozzuk meg a függvények első, második és harmadik deriváltját:

$$f(x) = x \ln x + 2x \quad f(x) = x^2 \ln x \quad f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

102. Deriváljuk: $f(x) = 2^{x^2-3}$ $f(x) = x \cdot 2^{x^2-3}$

103. Deriváljuk a következő összetett függvényeket:

$$\begin{array}{llll} f(x) = \sin 2x & f(x) = e^{3x} & f(x) = 2^{\cos x} & f(x) = (x^2 + x)^3 \\ f(x) = (x^2 - 1)^2 & f(x) = \log_2 6x & f(x) = \log_3^2 x & f(x) = \cos^3 x \end{array}$$

104. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 24x + 3}{3}$ függvény.

a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját a deriváltfüggvény segítségével!

b) Írjuk fel a deriváltfüggvény érintőjének egyenletét a deriváltfüggvény legnagyobb zérushelyében!

c) Számítsa ki a deriváltfüggvény, az előbbi érintő és az y tengely által közbezárt alakzat területét!

105. a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ ($p \neq -2$) függvényről tudjuk, hogy pontosan két zérushelye van, továbbá, hogy $f(2) = -p$. a) Határozza meg a függvény zérushelyeit. b) Szemléltesse az $f(x)$ függvény grafikonját! c) Az $f(x)$ függvény origón átmenő érintője hol metszi a függvény görbét?

108. Adottak az $x \geq 0$ valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 2x + 2$, valamint ugyancsak az $x \geq 0$ valós számok halmazán értelmezett $g(x) = \frac{1}{2}x + 8$ függvények. b) Mely $0 \leq x_0 \leq 4$ esetén lesz a $h(x) = |f(x_0) - g(x_0)|$ függvény értéke a legnagyobb?

109. Adottak a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ és $g(x) = x^2 - ax + 6$ függvények. Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy csak egyetlen olyan hely legyen, melyben a függvényekhez húzott érintők merőlegesek egymásra!

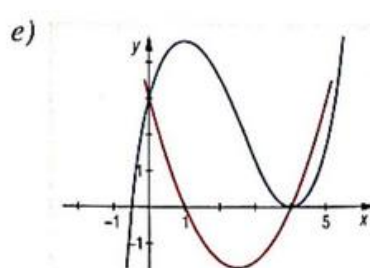
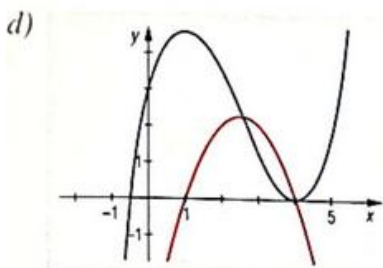
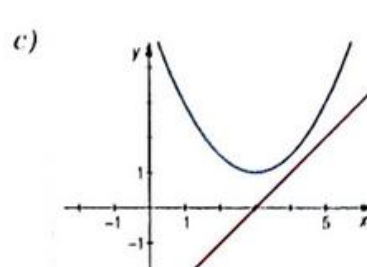
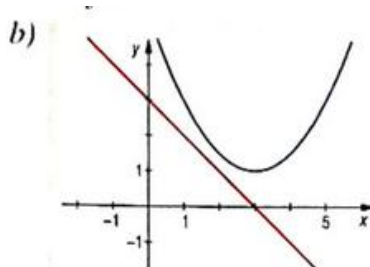
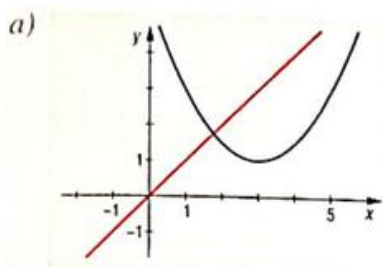
110. Legyen adva a valós számokon értelmezett $f(x) = x - \frac{2}{3}x^3$ függvény. a) A $[-2, 1]$ intervallum mely x értékei esetén veszi fel ez a függvény a maximális, illetve a minimális értékét? Mekkora ezek az értékek? b) Ezen az intervallumon hol lesz a grafikonhoz húzott érintő párhuzamos a $g(x) = -3x + 207$ függvény grafikonjával?

111. Teljes függvényvizsgálat: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

112. Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ a valós számokon értelmezett alábbi függvények: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$, $g(x) = x^3 + cx^2 + bx$ ($b \neq c$). a) Számítsa ki a két függvény grafikonjának a közös pontjait! b) Határozza meg az x_0 helyeket, amelyeknél a függvénygörbékhez húzott érintők párhuzamosak egymással!

113.

Az egy koordináta-rendszerben ábrázoltak közül lehet-e az egyik függvény a másik deriváltja



114. Állapítsuk meg a függvények deriváltjainak zérushelyét, ha az létezik.

a) $a(x) = 8;$

d) $d(x) = -x^2 + 5x;$

g) $g(x) = 2(x-3)^2 + 1;$

j) $j(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x;$

m) $m(x) = \sqrt{2x+6};$

p) $p(x) = \frac{1}{2x+1};$

s) $s(x) = \sin(3x^2);$

b) $b(x) = 3x - 2;$

e) $e(x) = 4x^2 + 3x - 9;$

h) $h(x) = -(5x+7)^2 - 3;$

k) $k(x) = (x+2)^3 - 6;$

n) $n(x) = \sqrt{x^2 - 3x};$

q) $q(x) = \frac{1}{x^2 - 4};$

t) $t(x) = \operatorname{ctg} \pi x.$

c) $c(x) = x^2 - 7;$

f) $f(x) = -3x^2 + 8x - 2;$

i) $i(x) = x^3 - 4x^2;$

l) $l(x) = 5(x^2 - 1)^3 + 8;$

o) $o(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 3x};$

r) $r(x) = \frac{10}{x^3 + 4x^2 - x + 2}$

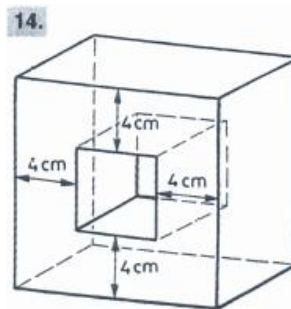
II. Térgeometriai számítások

Hasáb

1. Egy kocka testátlója 1 dm. Mekkora a térfogata?

2. Egy 8 cm élű kockát a lapjaival párhuzamos síkokkal 1 cm élű kockákra darabolunk szét. Az eredeti kocka felszíne a keletkezett 1 cm élű kockák felszínének hány százaléka?

3. Egy kockát a 14. ábrán látható módon átfűrtünk. Mekkora a kocka éle, ha a maradéktest térfogata 5120 cm^3 ?



4. A kocka felületén melyik az a pont, amelyből az egyik testátló a lehető legkisebb szögben látszik?

5. Egy 12 cm élű kocka egyik alapélén át olyan síkot fektetünk, amely az alaplappal 30° -os szöget zár be. Mekkora térfogatú részekre vágja szét a kockát ez a sík? Számítsuk ki a keletkezett testek felszínét!

6. Egy vasból készült háromoldalú hasáb alaplappja egyenlő szárú háromszög, amelynek szárszöge 20° és a szöggel szemközi oldala 10 cm. A hasáb magassága 20 cm. Mekkora a tömege, ha a vas sűrűsége $7,9 \text{ kg/dm}^3$?

7. Egy téglatest egyik csúcsából kiinduló három oldallap lapátlói 18 dm, 28 dm és 38 dm hosszúak. Mekkora a testátló?

8. Egy víztartály egyenes hasáb, amelynek alaplappja szabályos hatszög. A hatszög oldala 5 dm, a hasáb magassága 2 m. Mennyi idő alatt tölthető meg a tartály vízzel, ha másodpercenként 4 liter víz folyik bele?

9. Egy téglatest éleinek aránya 2:3:4. A felszínének és a térfogatának mérőszáma egyenlő. Mekkora az élek?

10. Mekkora a téglatest térfogata, ha a három átlós síkmetszetének a területe 4 dm^2 , 5 dm^2 és 6 dm^2 ? (Átlós síkmetszetnek nevezünk olyan téglalapot, amelynek csúcsai a téglatest csúcsai, de nem oldallapja a téglatestnek.)

11. Egy négyzetes oszlop oldalélének és alapélének az aránya egész szám. Az alaplapjának és a fedőlapjának élfelező pontjai egy másik négyzetes oszlop csúcsai. A beírt négyzetes oszlop oldallapjai területének és az eredeti oszlop alap- és fedőlapjai együttes területének az aránya $\frac{1}{4}$ és 1 között van. Létezik-e ilyen négyzetes oszlop?

12. Hány oldalú szabályos sokszögben lehet metszeni egy kockát?

13. Az 1200 cm^2 felületű nyitott négyzetes oszlopok közül melyiknek a térfogata a legnagyobb? Számítsuk ki a térfogatát!

Henger

14. Hány hl víz van abban a henger alakú kútban, amelynek átmérője 1,2 m, a víz mélysége 3 m?

15. a) Mekkora a felszíne az egyenlő oldalú hengernek, ha a sugara 8 cm?
b) Mekkora a térfogata az egyenlő oldalú hengernek, ha a felszíne 300 cm^2 ?

16. Egyenlő oldalú henger térfogata 1 liter. Számítsuk ki a henger méreteit!

17. Egy henger alakú, vízzel feltöltött tartály belső átmérője 2 m, a magassága 4,5 m. Mennyi a térfogata? Mennyit sülyyed a víz szintje a tartályban, ha 25 hl vizet kiengedünk? (A henger tengelye függőleges.)

18. Egy kapilláris cső átmérőjét akarjuk kiszámítani. 150 mg higany a csövet 9 mm magasságig töltötte meg. A higany sűrűsége $13,6\text{ g/cm}^3$. Mekkora a cső belső átmérője?

19. Mekkora a tömege annak a hengeres vascsőnek, amelynek a belső átmérője 8 cm, a falvastagsága 0,5 cm, a hossza 10 m? (A vas sűrűsége $7,8\text{ g/cm}^3$)

20. Egy henger sugara 6 cm, a magassága 10 cm. Mennyivel kell a henger sugarát meghosszabbítani, hogy a felszíne az eredeti henger felszínének nyolcszorosa legyen?

21. Egy ferde hengerben az alapkör és a fedőkör középpontját összekötő 54 cm hosszú szakasz az alaplappal 60° -os szöget alkot. A két kör középpontján átmenő és a körök síkjára merőleges metszet területe 1160 cm^2 . Számítsuk ki a henger térfogatát!

22. Egy henger magassága 7 cm-rel hosszabb az alapkör sugaránál. A palást és felszín területeinek aránya 16:25. Számítsuk ki a henger térfogatát!

23. Egy henger felszíne $150\pi\text{ cm}^2$, a palástja $94\pi\text{ cm}^2$. Számítsuk ki a henger térfogatát!

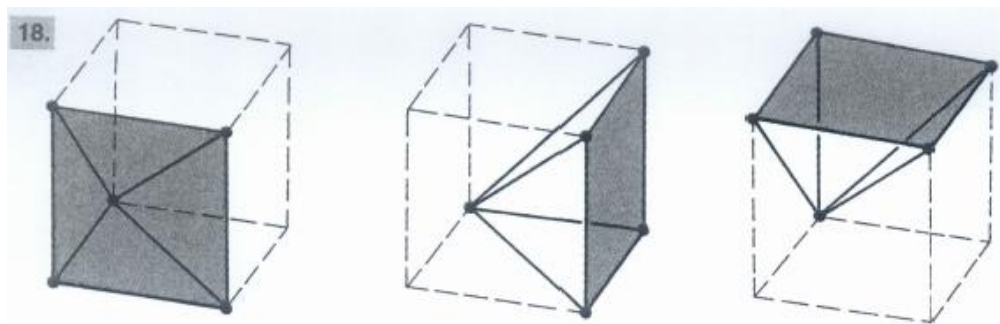
24. Mekkora a tömege annak a hengeres vascsőnek, amelynek a belső átmérője 8 cm, a falvastagsága 0,5 cm, a hossza 10 m? (A vas sűrűsége $7,8\text{ g/cm}^3$)

25. Egy 10 000 literes tartály mennyi idő alatt tölthető tele benzinnel, ha a töltés 40 mm átmérőjű csövön történik, és a folyadék a csőben 1 m/s sebességgel áramlik?

- 26.** 100 literes felül nyitott tartályt akarunk készíteni. Az egyik tartályt négyzetes oszlopnak, a másikat forgáshengernek tervezik. A magasságuk 4 dm. Melyik tartály elkészítéséhez kellene kevesebb lemezt felhasználni, ha hulladéokra mindkét esetben még 20-20%-ot számítunk?
- 27.** Egy forgáshenger alakú esőmérő felső nyílásának (a fedőkörnek) az átmérője 200 mm. Egy eső után felfogott vizet 45 mm átmérőjű mérőhengerbe öntöttünk, s ebben a vízoszlop magassága 200 mm volt. Hány mm eső esett? (Azaz milyen magasan állt volna a talajon a víz az eső után, ha semmi sem folyt volna el, és a talajba sem szivárgott volna be a csapadékból?)
- 28.** Egy téglalap oldalai 12 cm és 8 cm hosszúak. A téglalapot forgassuk az egyik, majd a másik oldala körül. Számítsuk ki a keletkezett forgáshengerek térfogatainak, illetve a felszíneinek az arányát!
- 29.** Két henger sugarainak aránya 1:2, a térfogatainak aránya 1:3. Számítsuk ki a palástok felszíneinek arányát!
- 30.** Egy forgáshenger sugara 8 cm, a magassága 48 cm. Létezik-e egy ezzel nem egybevágó forgáshenger, amelynek mind a köbtartalma, mind a felszíne az adottéval egyenlő? b) Oldjuk meg a feladatot általánosan! Az adott forgáshenger sugara legyen r , a magassága m .
- 31.** Egy 10 cm sugarú gömbbe hengert írunk. A palást területe az alaplap területének 3-szorosa. Számítsuk ki a henger térfogatát!
- 32.** Az R sugarú gömbbe írható hengerek közül melyik térfogata, illetve melyik palástja a legnagyobb?
- 33.** Egy forgáshenger alakú felül nyitott edényt vízzel megtöltünk. A henger sugara 10 cm, a magassága 30 cm. Mennyi víz ömlik ki az edényből, ha a tengelyét a függőleges helyzetéből 30° -os szöggel elmozdítjuk?
- 34.** Egy egyenes forgáshenger magassága az alapkör sugarának kétszerese, a henger palástjának felszíne $100\pi\text{ cm}^2$. A hengert egy, az alkotóval párhuzamos síkkal kettévágjuk. A metszettéglalap területe $50\sqrt{2}\text{ cm}^2$. Számítsuk ki a hengerből kimetszett kisebbik darab térfogatát!
- 35.** Egy egyenes körhenger palástjának felszíne úgy aránylik az alaplap területéhez, mint 5:3. A hengerből a tengelyen átmenő sík által kimetszett téglalap átlója 39 cm hosszú. Számítsuk ki a henger felszínét és a térfogatát!
- 36.** Két egyenes henger térfogatának különbsége $48\pi\text{ cm}^3$. A nagyobb térfogatú henger alapkörének sugara 1 cm-rel nagyobb a másikénál, a magassága pedig a másik magasságának $4/3$ -szorosa. Mekkora a hengerek magassága és alapköreinek sugara?

Gúla, csonkagúla

37. Egy 10 cm élű kockát a 18. ábrán látható módon három gúlára vágunk szét. (A keletkezett gúlák alapjait bevonalkáztuk.) Szerkesszük meg a gúlák hálózatait! Igazoljuk, hogy a gúlák egybevágók!



38. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 5 cm, oldaléle 8 cm. c) Számítsuk ki a gúla magasságát, az oldalél és az alaplapp hajlásszögét, az oldallap és az alaplapp hajlásszögét, a két szemközti oldallap és két szomszédos oldallap hajlásszögét! d) Számítsuk ki a gúla térfogatát és felszínét! e) Számítsuk ki a gúla és a köré írható gömbök sugarait! (A beírt gömb érinti a gúla lapjait, a köré írható gömb átmege a gúla csúcsain.)

39. Számítsuk ki az 1 dm élű szabályos tetraéder magasságát! b) Igazoljuk, hogy a szemközti élek felezőpontjait összekötő szakasz mindkét élre merőleges! Milyen hosszú ez a szakasz? c) Számítsuk ki a test felszínét és térfogatát! d) Igazoljuk, hogy az éleket érintő gömb sugara a beírt és a köré írt gömbök sugarainak mértani közepe!

40. Az a élű szabályos tetraéder egyik csúcsából a szemközti lapra merőlegest húzunk. A csúctól milyen távolságra van ezen a szakaszon az a pont, amelyből az alap oldalai derékszögben látszanak?

41. Számítsuk ki a szabályos ötszög alapú gúla felszínét és a térfogatát, ha az alapélek 10 cm, az oldalélek 20 cm hosszúak!

41. Egy gúla egyik csúcsából induló élek 3 dm, 4 dm és 5 dm hosszúak, és páronként merőlegesek egymásra. Mekkora a gúla térfogata és a felszíne?

42. Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle 12 cm, az oldallapok 60° -os szöget zárnak be az alaplappal. Számítsuk ki a gúla térfogatát és a felszínét!

43. Az $ABCD$ háromoldalú gúla A csúcsán és a BD és a CD élek felezőpontjain át síkot fektetünk. Ez a sík a gúlát két részre osztja. Számítsuk ki a két rész térfogatainak arányát!

44. Mekkora a gúla térfogata, ha a magassága 20 dm és az alaptól 4 dm távolságban levő és az alappal párhuzamos síkmetszet területe 60 dm^2 ?

45. Egy gúla alapja 400 cm^2 . Az alappal párhuzamos metszetidom területe 100 cm^2 . Számítsuk ki az eredeti gúla és a síkmetszet által levágott gúla térfogatainak az arányát!

46. Egy szabályos négyoldalú csonkagúla alapéle 10 cm, fedőéle 6 cm, az oldaléle 5 cm hosszú. Számítsuk ki az oldalélnek az alaplappal, az oldallapnak az alaplappal bezárt szögét, a csonkagúla felszínét és a térfogatát!

47. Egy szabályos négyoldalú csonkagúla alapéle 10 cm, a fedőéle 4 cm, a magassága 6 cm hosszú. Hol kell a csonkagúlát az alaplappal párhuzamos síkkal elmetezni úgy, hogy a keletkezett két test térfogata egyenlő legyen?
48. Két szabályos a élű tetraéder egyik csúcsa és a csúcsból az alaplapra húzott magassága közös. Az egyik alaplapját a másikéhoz viszonyítva a közös magasság mint tengely körül 60° -kal elforgattuk. Számítsuk ki a közös rész térfogatát!
49. Egy gúla alapja körbe írható hatszög. Az egymás után következő oldalak rendre 2 cm, 4 cm, 2 cm, 4 cm, 2 cm, 4 cm hosszúak. A gúla magassága 30 cm. Mekkora a térfogata? Az alaplap oldalainak a sorrendje befolyásolja-e a gúla térfogatát?
50. Egy gúla alapja 400 cm^2 . Az alappal párhuzamos metszetidom területe 100 cm^2 . Számítsuk ki, az eredeti gúla és a síkmetszet által levágott gúla térfogatainak az arányát!
51. Szabályos négyoldalú gúla alapéle 1 dm, a térfogata $0,8 \text{ dm}^3$. Számítsuk ki a gúla felszínét!
52. Egy kocka éle 12 cm. Az éleken jelöljük ki a felezőpontokat. Ezután vágjunk le mindegyik csúcsnál a csúcshoz legközelebb fekvő felezőpontokon átmenő síkokkal háromoldalú gúlákat. Számítsuk ki a maradéktest térfogatát!
53. Szabályos négyoldalú gúla mindegyik éle a hosszúságú. Számítsuk ki a gúla felszínét, és a térfogatát! b) Mekkora a szabályos négyoldalú gúla felszíne, ha a térfogata 1000 cm^3 és az élei egyenlő hosszúak?
54. Szabályos négyoldalú gúla alapéle 20 cm, a magassága 8 cm. A gúlába kockát helyezünk el. A kocka alaplapja a gúla alaplapjára, a fedőlap csúcsai a gúla oldaléleire illeszkednek. Számítsuk ki a kocka térfogatát!
55. Egy négyoldalú gúla alaplapja rombusz. A rombusz oldala 5 dm, egyik szöge 45° -os. A gúla magassága 8 dm, és a csúcsnak az-alaplapra eső merőleges vetülete a rombusz átlóinak közös pontjába esik. Számítsuk ki a gúla térfogatát és a felszínét!

Kúp, csonkakúp

56. Egy kúp magassága 10 cm, a kúpba írt gömb sugara 3 cm. Írjunk a gömb köré hengert úgy, hogy a henger alapja a kúp alapjára illeszkedjen! Számítsuk ki a kúp és a henger térfogatának arányát! Igazoljuk, hogy ha ez az arány $4/3$, akkor a gömb sugara 2,5 cm!
57. Számítsuk ki a kúp nyílásszögét, ha az alkotója 20 cm és a kiterített palásthöz tartozó középponti szög 180° !
58. Egy kúp térfogata $350\pi \text{ cm}^3$. A sugár az alkotóval 45° -os szöget alkot. Számítsuk ki a palást felszínét és a kiterített palásthöz tartozó középponti szöget!
59. Egy kúp alkotója 40 cm, a tengelymetszetének területe 700 cm^2 . Számítsuk ki a kúp térfogatát és a felszínét!
60. Egy 10 cm (a) oldalú szabályos háromszög lemezt megforgatunk az egyik oldalegyenese körül. Számítsuk ki a keletkezett forgástest felszínét és térfogatát!

61. Egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, a szára 13 cm hosszú. Forgassuk meg a háromszöget a szárhoz tartozó magasság egyenesére körül! Számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

62. Egy csonkakúp alkotója 5 cm, az alapkör és a fedőkör sugarainak különbsége 1 cm, a palást területe 188 cm^2 . Számítsuk ki a csonkakúp térfogatát!

63. Egy homokbányából kotrógéppel emelik ki a homokot. A kitermelt homok 6 m magas kúpot képez, amely alul 15 m széles. Egy 5 tonnás teherautó hány fordulóval szállíthatja el, ha 1 m^3 homok tömege 2000 kg?

64. Egy kúp alkotója 24 cm és a nyílásszöge 40° . Számítsuk ki a felszínét és a térfogatát!

65. A kiöntött homok 30° -os természetes lejtéssel állapotodik meg. (Ekkora szöget képez az alkotó a vízszintessel.) Milyen magas és milyen széles az a homokkúp, amelyben 20 m^3 homok van?

66. Számítsuk ki a kúp térfogatát, ha a palástja 480 dm^2 és a sugara 10 dm! Mekkora a kiterített palásthöz tartozó középponti szög?

67. Egy kúp alkotója 12 cm, és a kiterített palásthöz tartozó középponti szög 240° . Számítsuk ki a kúp térfogatát és nyílásszögét!

68. Számítsuk ki a kúp felszínét, ha a térfogata 50 dm^3 és a tengelymetszetének a területe 12 dm^2 !

69. Egy kúp alakú tölcser sugara 4,5 cm, a magassága 20 cm. (A tölcser tengelye függőleges, a csúcsa alul van.) Milyen magasságig kell folyadékkal megtölteni, hogy a beöntött folyadék térfogata a kúp térfogatának a fele legyen?

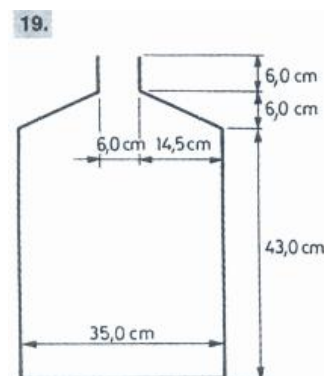
70. Hatoldalú szabályos gúlából maximális térfogatú kúpot csiszolunk. Hány százalék a hulladék?

71. Adott R sugarú gömb köré írjunk legkisebb térfogatú kúpot! Mekkora a kúp térfogata?

72. Egy csonkakúp alakú papírból készült lámpaernyő alkotója 40 cm. A csonkakúp alapkörének sugara 20 cm és 30 cm. Számítsuk ki a kiegészítő kúp alkotóját! Szerkesszük meg a kiterített palástot kicsinyített méretben (1: 5 arányban)! Számítsuk ki a csonkakúp felszínét és a térfogatát!

73. Számítsuk ki a csonkakúp felszínét és a térfogatát, ha az alaplap sugara 16 cm, és a 8 cm hosszú alkotó az alaplap síkjával 60° -os szöget zár be!

74. Hány liter tej fér a 19. ábrán látható, keresztmetszetével megadott tejeskannába? Mennyi bádoggal szükséges a kanna elkészítéséhez, ha összeillesztésre, hulladéokra még 8%-ot hozzászámítunk?



75. Egy kúp alapkörének a sugara 24 cm, alkotója 50 cm. A magasságának az alaptól számított $\frac{2}{3}$ részében vesszük el a kúpot az alappal párhuzamos síkkal. Mekkora a csonkakúp felszíne és a térfogata?

76. Egy 10 cm oldalú szabályos hatszöget megforgatunk a két szemközti csúcsán átmenő, majd a két szemközti oldal felezőpontján átmenő szimmetriatengelyei körül. Határozzuk meg az így keletkező testek felszíneinek, majd térfogatainak arányát!

77. Egy háromszöglemez csúcsainak koordinátái: A(6; 2), B(6; 8), C(2; 8). Forgassuk a háromszöget az y tengely, majd az x tengely körül. Számítsuk ki a keletkezett forgástestek térfogatait!
78. Egy csonkakúp alapkörének sugara 10 dm, a fedőkörének sugara 4 dm hosszú. A kiegészítő kúp magassága 6 dm. Számítsuk ki a csonkakúp felszínét és a térfogatát!
79. Egy csonkakúp alaplajának területe 100 cm^2 , a fedőlapé 64 cm^2 . Számítsuk ki az alaplappal párhuzamos síkmetszet területét, ha a sík a csonkakúp magasságát felezi!
80. Egy forgáskúp alapkörének sugara R , magassága m ; egy forgáshenger sugara r , a magassága szintén m . a) Mekkora a R/r arány, ha a két test térfogata egyenlő? b) Mekkora az m/r arány, ha a két test térfogata is, palástjuk területe is egyenlő?
81. Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 20 cm, a fedőlap sugara 15 cm, az alkotók az alaplappal 60° -os szöget zárnak be. Mekkora a csonkakúp felszíne és térfogata?
82. Egy egyenes henger alapköre és egy forgáskúp alapköre egybevágók. A két test egyenlő magasságú, a felszínük aránya 5:3. Számítsuk ki a kúp nyílásszögét!
83. Egy csonkakúp alakú kád alapkörének sugara 4 dm, a fedőkörének sugara 12 dm, a magassága 9 dm. A magasságának harmadáig megtöltjük vízzel. A vízzel töltött rész térfogata a csonkakúp térfogatának hány százaléka?
84. Egy egyenes körkúp kiterített palástja egy kör harmadrésze. Számítsuk ki a kúp magasságának és az alapkör sugarának az arányát!

Gömb

85. Egy gömb felszíne 50 cm^2 . Mekkora a térfogata?
86. Az 1000 cm^3 térfogatú gömböt a középpontjától 2 cm távolságban haladó síkkal elmetszik. Mekkora a metszet területe?
87. Hány darab 0,2 cm átmérőjű sörétet lehet önteni 40 kg ólomból? (Az ólom sűrűsége $11,6 \text{ g/cm}^3$)
88. Egy téglatest alaplajának oldalai 20 cm és 30 cm hosszúak. Az edényben 10 cm magas vízoszlop van. Hány cm-t emelkedik a víz szintje, ha 4 darab 8 cm átmérőjű vasgolyót dobunk a vízbe?
89. Egy 2 kg tömegű, $0,5 \text{ kg/dm}^3$ sűrűségű fagolyó hány fordulatot tesz, ha egy 35 m hosszú tekepályán végig gurul? (Feltételezzük, hogy mozgás közben a gömb ugyanazon főkörre érintkezik a pályával!)
90. Egy belül üres rézgolyó átmérője 12,0 cm, a tömege 2000 g. Mekkora a falvastagsága, ha a réz sűrűsége $8,4 \text{ g/cm}^3$?
91. Egy felül nyitott forgáskúp tengelye függőleges. A kúp sugara 14 cm, a magassága 35 cm. A kúpban 25 cm magasságig víz van. A kúpba egy 8 cm átmérőjű vasgolyót helyezünk. Elfedi-e a víz a golyót? Mennyivel emelkedik a víz felszíne, ha a golyót a vízbe helyezzük?

92. Szabályos háromoldalú hasábba 20 cm sugarú gömb írható. Mekkora a hasáb felszíne és a térfogata?
93. Egy 30 cm sugarú gömbbe írt háromoldalú hasáb alapja szabályos háromszög, az oldallapjai négyzetek. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?
94. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 24 cm. A gúlába 4 cm sugarú gömb írható. Mekkora a gúla térfogata?
95. Egy 30 cm sugarú gömbbe írt henger palástjának felszíne a gömb felszínének a fele. Határozzuk meg a gömb és a henger térfogatának arányát!
96. Egy félgömb köré hengert, a félgömbbe kúpot írunk. A henger és a kúp alapköre a gömb alapkörével, a magasságuk a félgömb sugarával egyenlő. Számítsuk ki a három test térfogatainak arányát!
97. Határozzuk meg az egyenlő oldalú henger, a beírható gömb és a hengerbe írható kúp térfogatainak arányát! (Egyenlő oldalú hengeren olyan forgáshengert értünk, amelynek a tengelymetszete négyzet.)
98. Egy gömb köré és a gömbbe egyenlő oldalú forgáskúpot írunk. Számítsuk ki a három test térfogatainak és a felszíneinek arányát! (Egyenlő oldalú kúpon olyan forgáskúpot értünk, amelynek a tengelymetszete szabályos háromszög.)
99. Egy r sugarú gömbbe írt téglatest oldallapjai területének aránya 1:2:3. Számítsuk ki az éleket!
100. Egy r sugarú gömb belsejében a középponttól d ($d < r$) távolságra fekvő ponton át három, páronként egymásra merőleges síkot fektetünk. Bizonyítsuk be, hogy a síkok által kimetszett körök területeinek összege csak az r -től és a d -től függ!
101. Igazoljuk, hogy négy, nem egy síkban fekvő pont pontosan egy gömböt határoz meg!
102. Egység sugarú gömb köré olyan kúpot írunk, amelynek a felszíne a gömb felszínének kétszerese. Mekkora a kúp térfogata? A gömb térfogata a kúp térfogatának hány százaléka? (A gömb érinti a kúp alapját és a palástját.)
103. 10 cm sugarú gömb sugarát 1 mm-rel csökkentjük. Hány százalékkal csökkent a gömb térfogata, illetve felszíne?
104. Egyenes csonkakúpba gömböt helyezünk. A gömb érinti a csonkakúp palástját, alap és fedőkört. A csonkakúp térfogata a gömb térfogatának kétszerese. Számítsuk ki a csonkakúp sugarainak arányát!
105. Egy gömb felszíne $250\pi \text{ cm}^2$. Számítsuk ki annak a gömbnek a sugarát, amelynek térfogata az adott gömb térfogatának kétszerese!
106. Egy gömb felszíne $100\pi \text{ cm}^2$. Számítsuk ki a gömbbe írható egyenlő oldalú henger felszínét és a térfogatát!
107. Egy 9 cm sugarú gömbbe írt négyoldalú gúla alaplappja négyzet, oldallapjai szabályos háromszögek. Számítsuk ki a gúla térfogatát! (A gúla csúcsai a gömbfelületre illeszkednek.)
108. 10 cm sugarú gömb köré írható csonkakúp térfogata a gömb térfogatának három-szorosa. Számítsuk ki a csonkakúp sugarait!

109. Két egymást kívülről érintő gömb sugarai 2 cm és 4 cm. A gömbök köré forgáskúpot írunk. (A kúp alapköre érinti a nagyobb gömböt, a palást érinti mindkét gömböt.) Számítsuk ki a kúppalást azon darabjának felszínét, amely a két gömb közé esik!

Forgástest térfogata

110. Egy szabályos háromszög oldala 16 cm hosszú. Forgassuk a háromszöget az egyik oldallal párhuzamos és a szemközti csúcson átmenő tengely körül. Számítsuk ki a keletkezett test felszínét és a térfogatát!

111. Egy háromszög csúcsainak koordinátái $A(2; 8)$, $B(12; 2)$, $C(5; 14)$. A háromszöget megforgatjuk az y tengely körül. Számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát! (Annak a testnek a térfogatát, amelyet forgás közben a háromszöglemez súrol.)

112. Egy R sugarú kör köré írt szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak aránya 1: 3. (A trapéz oldalai a kör érintői.) Forgassuk meg a trapézt a szimmetriatengelye körül 180° -kal. Fejezzük ki az így keletkezett forgástest felszínét és a térfogatát R -rel!

113. Forgassunk meg egy egyenlő szárú háromszöget egyik szára, majd az alapja körül. Jelölje V_1 illetve V_2 az így keletkezett forgástestek térfogatát. Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha $V_1: V_2 = 3:7$!

114. Egy nem egyenlő szárú derékszögű háromszöget a rövidebb befogója körül megforgatva olyan forgástest keletkezik, amelynek a felszíne $300 \pi \text{ cm}^2$, a térfogata $240 \pi \text{ cm}^3$. Mekkora a háromszög oldalai?

115. Számítsuk ki azoknak a forgástesteknek a térfogatát, amelyeket az alábbi függvények grafikonjainak az x tengely körüli forgatásával kapunk!

a) $f: [0,5] \rightarrow R, \quad f(x) = 2\sqrt{x}$

b) $f: [0,3] \rightarrow R, \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2$

c) $f: [-2,2] \rightarrow R, \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3$

d) $f: [-5,5] \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

116. Számítsuk ki annak a forgástestnek a térfogatát, amely az $f(x) = \frac{x}{2}$ és $g(x) = \sqrt{2x}$ függvények görbéi által határolt zárt síkidomnak az x tengely körüli forgatása közben keletkezik!

117. Az $f: [0,4] \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt{x}$ és $g: [0,4] \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt{2x}$ függvények görbéi és az $x = 4$ egyenletű egyenes által határolt zárt síkidomot az x tengely körül megforgatjuk. Számítsuk ki a kapott forgástest térfogatát

118. Számítsuk ki annak a testnek a térfogatát, amelyet akkor kapunk, ha az $y = \sqrt{x}$ egyenletű parabola, az y tengely és a parabola $P(4; 2)$ ponthoz tartozó érintője által határolt zárt síkidomot az x tengely körül forgatjuk!

Vegyes feladatok

119. Van-e maximális és minimális térfogatú azok közül a szabályos négyoldalú gúla közül, amelyeknek minden éle 12 cm?

120. Egy forgáshenger sugarának és alkotójának hosszúságainak összege 24 cm. Mekkora a sugár, ha a henger térfogata maximális?

121. Egy szabályos nyolcszög alapú egyenes hasáb alapéle 3,4 cm, oldaléle 8,02 cm. Mekkora a térfogata?

122. Mekkora a háromoldalú ferde hasáb térfogata, ha alapélei 20 dm, 26 dm, 33 dm, az oldalélek hosszúsága 52 dm, ezek az alaplappal $69,6^\circ$ -os szöget zárnak be?

123. Egy gúlának az alaplappja szabályos háromszög, oldallapjai egyenlő szárú egybevágó háromszöge, melyek területe az alaplapp területének kétharmadszorosa. Mekkora az oldallapnak az alaplappal bezárt szöge?

124. Egy négyzet alapú szabályos csonkagúla felszíne 2873 cm^2 . Az alapél 32 cm, a fedőél 9 cm. Számítsuk ki a térfogatát.

III. Integrálszámítás

A határozott integrál definíciója

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon korlátos függvény.

Legyen $[a, b]$ egy felosztása $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$.

A felosztáshoz tartozó alsó összeg $s = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$,
ahol m_i a függvényértékek alsó határa az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumban.

A felosztáshoz tartozó felső összeg

$$S = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

ahol M_i a függvényértékek felső határa az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumban.

(Megjegyzés: m_i és M_i biztos léteznek, mert f korlátos.)

Az f függvény integrálható az $[a, b]$ intervallumban, ha ott értelmezve van, és az összes lehetséges felosztáshoz tartozó alsó összegek felső határa megegyezik az összes lehetséges felosztáshoz tartozó felső összegek alsó határával.

Ez a szám a függvény a -tól b -ig vett (határozott) integrálja. Jelölés: $\int_a^b f(x) dx$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1. Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre és tekintsük az $f(x) = x^2$ függvény görbét. Határozzuk meg az alsó és a felső közelítő összeget.

2. Osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre és tekintsük az $f(x) = x^3$ függvény görbét. Határozzuk meg az alsó és a felső közelítő összeget.

3. Határozzuk meg az alsó és a felső közelítő összeget a $[0, 2]$ intervallumban az $f(x) = x^2$ függvény görbéje alatt.

4. Határozzuk meg az alsó és a felső közelítő összeget a $[0, 3]$ intervallumban az $f(x) = 2x^2$ függvény görbéje alatt.

5. Határozzuk meg az alsó és a felső közelítő összeget a $[0, 8]$ intervallumban az $f(x) = 5x^3$ függvény görbéje alatt.

6. Osszuk fel a megadott intervallumot négy egyenlő részre, majd számoljuk ki az alsó és felső közelítő téglalapösszegeket. $f(x) = x^2 + 3, [0, 2]$ $g(x) = -2x^2, [0, 1]$

7. Osszuk fel a megadott intervallumot négy egyenlő részre, majd számoljuk ki az alsó és felső közelítő téglalapösszegeket. $f(x) = 2^x, [0, 1]$ $g(x) = \sin x, \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

8. Számítsuk ki a határozott integrálokat a definíció alapján:

$$\int_0^2 5dx$$

$$\int_0^2 xdx$$

$$\int_0^2 5xdx$$

$$\int_0^5 \frac{1}{10}xdx$$

$$\int_0^5 x^2dx$$

$$\int_1^2 (6x^2 + 4)dx$$

$$\int_2^3 xdx$$

$$\int_1^3 (4x - 1)dx$$

$$\int_{-1}^1 xdx$$

$$\int_1^2 x^2dx$$

9. Számítsuk ki a határozott integrálokat a definíció alapján:

$$\int_{-1}^0 -2dx$$

$$\int_0^2 5x^2dx$$

$$\int_0^8 5x^3dx$$

$$\int_0^3 4dx$$

$$\int_1^3 3xdx$$

$$\int_0^3 2xdx$$

$$\int_0^3 2xdx$$

$$\int_0^2 2x^2dx$$

$$\int_0^3 (1 - x)dx$$

$$\int_1^2 xdx$$

$$\int_0^4 6xdx$$

10. Számítsuk ki számológéppel $\int_0^\pi \sin x dx$ közelítő értékét.

11. Legyenek $0 < a < b$ tetszőlegesen rögzített valós számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $[a, b]$ intervallumon az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény felső és alsó közelítő összegeinek különbsége 0-hoz tart.

b) Adjuk meg az előző részfeladat alapján, hogy legalább hány osztáspont felvétele szükséges az $[1, 2]$ intervallum felett az $f(x)$ függvény görbéje és az x tengely által bezárt terület 0,01 pontossággal történő meghatározásához

Feladatok határozott integrálra és a Newton-Leibniz tételre

12. $\int_0^5 (2x - 5) dx$ $\int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx$ $\int_{-5}^5 \sin x dx$

$\int_{-1}^1 (x + 3)(x - 1)^2 dx$ $\int_1^2 (\sqrt{x} + x^2) dx$ $\int_0^1 (x - 1)(x + 7) dx$ $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx$

13. Végezzük el a kijelölt integrálásokat.

$\int_0^\pi \sin x dx$ $\int_0^1 x^n dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx$

$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ $\int_{-2}^0 (-1) dx$ $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$ $\int_0^{2\pi} \sin x dx$

14. Végezzük el a kijelölt integrálást: $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

15. A Newton-Leibniz tétel segítségével számítsuk ki:

$\int_0^1 x^2 dx$ $\int_{-2}^0 (x^2 + 3) dx$ $\int_0^2 (-3x^2 + 4x) dx$ $\int_2^3 (0,5(x - 5)^2 + 2) dx$ $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$

$\int_1^2 x^{-2} dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ $\int_2^3 \frac{3}{x^5} dx$

16. Számítsuk ki a Newton—Leibniz-tétellel a következő integrálokat!

$\int_0^6 x dx$ $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} x dx$ $\int_{-3}^3 \frac{1}{4} x^2 dx$ $\int_{-4}^0 3x^2 dx$ $\int_{-5}^6 (3x - 7) dx$
 $\int_2^4 (x^3 - 5) dx$

$\int_1^{\sqrt{3}} (x^2 - x + 3) dx$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x dx$ $\int_0^8 \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} dx$ $\int_0^\pi (\sin x + \cos x) dx$ $\int_{-1}^2 (1 + e^x) dx$

17. Számítsuk ki a következő határozott integrálokat.

$\int_1^3 (4x - 1) dx$ $\int_0^5 (5x - x^2) dx$ $\int_1^8 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) dx$ $\int_0^2 (4x - x^2) dx$

Határozatlan integrál

18. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat:

$\int 6 dx$ $\int 2x dx$ $-2 \int x dx$ $\int x^2 dx$ $\int 4x^3 dx$ $\int nx^{n-1} dx$ $\int x^5 dx$ $\int 2x^4 dx$
 $\int \frac{x^{-3}}{5} dx$

$\int \sqrt{x} dx$ $\int (4x^3 + 8x - 3) dx$ $\int (x - 2)(2x - 7) dx$ $\int \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx$

19. Végezzük el a kijelölt integrálást. $\int 5 dx$ $\int (-2x^2 + 3x + 1) dx$

20. Végezzük el a kijelölt integrálásokat. $\int \cos 2x dx$ $\int \cos(3x + 5) dx$

21. Bizonyítsd be, hogy $\int (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + c$

22. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

$$\int 5x^2 dx \quad \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx \quad \int x^{-3} dx \quad \int \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3}\right) dx \quad \int (x^2 - x + 1) dx$$

$$\int (\sin x + \cos x) dx \quad \int \frac{x^2-1}{x+1} dx \quad \int \frac{x^3-1}{x-1} dx \quad \int (1 + e^x) dx$$

23. Végezzük el a kijelölt integrálásokat:

$$\int (2x + 5) dx \quad \int (x^2 - 3) dx \quad \int (x^2 - 3x) dx \quad \int (2x^2 + x - 1) dx$$

24. Végezzük el a kijelölt integrálásokat:

a) $\int 6 dx;$	b) $\int 2x dx;$	c) $-2 \int x^{-3} dx;$	d) $\int 4x^3 dx;$
e) $\int nx^{n-1} dx;$	f) $\int x^5 dx;$	g) $\int 2x^4 dx;$	h) $\int \frac{x^{-3}}{5} dx;$
i) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$	j) $\int \sqrt[3]{x^7} dx;$	k) $\int (4x^3 + 8x - 3) dx;$	l) $\int (x-2)(2x+7) dx;$
m) $\int \frac{x \cdot \sqrt{x^3}}{x^4} dx;$	n) $\int \frac{x + \sqrt{x^3}}{x^4} dx;$	o) $\int (x+2)^2 dx;$	p) $\int (x-1)^3 dx;$
q) $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx;$	r) $\int \frac{x^3-8}{x-2} dx;$	s) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx;$	t) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx.$

Területszámítás integrállal

25. Mekkora területet határolnak az $y = 2x^2$ és az $y = 2\sqrt{x}$ egyenletű görbék?

26. Mekkora az $y = 4x^2$ egyenletű parabola, az x tengely és a parabola (2, 16) pontjára illeszkedő érintő által határolt síkidom területe?

27. Mekkora annak a zárt síkidomnak a területe, amelyet az $y = x^2$ egyenletű parabola, a parabolának az x=2 abszcisszájú pontjában húzott érintő és az x tengely határolnak?

28. Számítsuk ki és az eredménynek adjuk meg a geometriai jelentését. $\int_{-b}^b ax^2 dx$

29. Határozzuk meg c értékét úgy, hogy az $y = -x^2 + c$ parabola az x tengellyel 10 egység területet zárjon közre.

30. Mekkora területet határol az $y = x^5 - x^3$ egyenletű görbe és az x tengely?

31. Mekkora területet vág le a negyedik síknegyedből az $y = (x-2)^2 + 3$ parabola 5 abszcisszájú pontjához tartozó érintő?

32. Számítsuk ki az $y = (x-1)(x+2)(x+3)$ egyenletű görbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -3$ és $x_2 = 2$ határok között.

33. Mekkora területet határol a következő függvénygörbe és az x tengely a megadott intervallumban?

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad [0, 1] \quad f(x) = 0,5(x-2)^2 - 10 \quad [1, 4]$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{2} \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right] \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \quad [0, 3]$$

$$f(x) = x^2 - 1 \quad [-1, 1]$$

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4 \quad [0, 5]$$

34. Határozzuk meg a két függvény görbéje által közrefogott zárt síkidom területét.

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = -x + 2$

b) $f(x) = x^2 - 2x$ $g(x) = 0,5x^2 - x$ c) $f(x) = x^3 - x$ $g(x) = x^2 - 1$

35. Határozzuk meg az $y = 2x^2$ egyenletű parabola, az $y = 2$ és az $y = 8$ egyenletű egyenesek által bezárt területet.

36. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 - x + 6$ függvény, valamint a $g(x) = f'(x) - f(x) + 5$ függvény. Van-e olyan x_0 hely, ahol az $f(x)$ és $g(x)$ függvények érintői párhuzamosak? Számítsa ki az $f(x)$ és $g(x)$ függvények által közbezárt terület nagyságát!

37. Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola átmegy az origón, és az $E(3, 6)$ pontjához húzott érintő meredeksége -4 . Milyen arányban osztja az $y = 2x$ egyenes a parabola és az x tengely által közrefogott síkidom területét?

38. Számítsuk ki az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3 + x^2 - 2x$ függvénygörbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 1$ határok között.

39. Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = 13 - (x - 1)^2$ és $g(x) = 4|x + 1|$ függvényeket.
a) Oldjuk meg az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenséget grafikusan. b) Mekkora területű az $f(x)$ és a $g(x)$ görbéje által határolt síkidom?

40. Adottak a valós számok halmazán értelmezett f és g függvények: $f(x) = 2x + 4$ és $g(x) = x^2 + 2x + 4$. Számítsa ki az $f(x)$ függvény görbéje, a $g(x)$ függvény görbéje, valamint az $x = -2$ egyenes által közbezárt terület nagyságát!

41. Számítsuk ki a függvénygörbe és az x tengely közé eső síktartomány területét az adott határok között

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad 3 \text{ és } 6$$

$$f(x) = -x^3 + 8, \quad 0 \text{ és } 2$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}, \quad 0 \text{ és } 4$$

$$f(x) = \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} \text{ és } \frac{3\pi}{4}$$

$$f(x) = x^2 + 1, \quad -4 \text{ és } 4$$

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9, \quad -1 \text{ és } 2$$

$$f(x) = -x^2 + 4, \quad -4 \text{ és } 0$$

$$f(x) = |x^3|, \quad -1 \text{ és } 3$$

42. a) Az $y = x^3$ egyenletű görbét eltoljuk a $\mathbf{v}(0; 4)$ vektorral. Számítsuk ki a két görbe közé eső síkidom területét az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 3$ határok között! b) Az $y = \frac{1}{2}x^2$ egyenletű parabolát eltoljuk a $\mathbf{v}(0; -2)$ vektorral. Számítsuk ki a két parabola közti síkidom területét az $x_1 = -3$ és az $x_2 = 3$ határok között!

43. Számítsuk ki az $r(x)$ és az $s(x)$ függvények görbéi között levő zárt síkidom területét (oszloponként).

$$r(x) \quad 3x^2 \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad x^3 - 8 \quad -\frac{1}{4}x^4 + 3 \quad \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$$

$$s(x) \quad 3 \quad x + 2 \quad \frac{1}{2}x \quad 4x - 8 \quad -4x + 3 \quad -x^2 + 8x - 12$$

44. Az $y = \frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe és az x tengely közötti terület az $x_1 = 2$ és az $x_2 = b$ határok között egynegyed. Mekkora a b ?

45. Egy síkidomot az x tengely, az $y=x+1$ egyenletű egyenes és az $y = \sqrt{1-x}$ egyenletű parabola határolnak. Mekkora a területe?

46. Egy síkidomot az x tengely, az $y = 2\sqrt{x}$ és az $y = \sqrt{2x+4}$ egyenletű parabolák határolnak. Számítsuk ki a területét!

47. Számítsuk ki az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ egyenletű görbék által bezárt síkidom területét a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ intervallumon!

48. Mekkora területű síkidomot fog közre az f és a g függvény grafikonja?

$$f(x) = 3x^2 \quad g(x) = 4 - x^2$$

$$f(x) = x^2 - 5 \quad g(x) = -x^2 + 4x + 1$$

49. Számítsuk ki a két görbe által határolt síkidom területét. $y^2 + 2 = x$ $2y^2 = x$

50. Az $x^2 - 6x + y + 5 = 0$ egyenletű parabolához az x tengelyre illeszkedő pontjában érintőket húzunk. Mekkora a parabola és a két érintő által közrefogott síkidom területe?

Térfogatszámítás integrállal

51. Számítsuk ki az $y = x^3 - 1$ egyenletű görbének az x tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogatát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ határok között.

52. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkrészt, amelyet az $y = x^3$ egyenletű görbéből az $y = 9x$ egyenletű egyenes levág, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

53. Forgassuk meg az x tengely körül azt a síkidomot, amelyet az $y = x^2$ egyenletű görbéből az $y = x$ egyenletű egyenes levág, és számítsuk ki a keletkezett forgástest térfogatát.

54. A megadott függvények görbéit a megadott intervallumban megforgatjuk az x tengely körül. Számítsuk ki a kapott testek térfogatát.

a) $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$ $[0, 8]$

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $[-1, 1]$

c) $f(x) = \frac{2}{x}$ $[0,5; 2]$

55. Forgassuk meg az x tengely körül az alábbi egyenletű görbékkel határolt síkidomot. Mekkora a síkidom területe és mekkora a keletkező forgástest térfogata?

a) $y = x$ $y = 2x$ $x = 5$

b) $y = x^2$ $y = 2x^2$ $x = 5$

56. Számítsuk ki az $y = x^3 - 1$ egyenletű görbének az x tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogatát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ határok között.

57. Számítsuk ki az $y^2 = 2x$ egyenletű parabolából az $x = 5$ egyenletű egyenessel levágott síkidomnak az x tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát.

58. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis x tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogatát.

Vegyes feladatok

59. Kétoldali közelítéssel számítsuk ki

- a) az $y = \frac{1}{2}x^2$ egyenletű parabola alatti területet az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 1$ határok között,
- b) az $y = x^2$ egyenletű parabola alatti területet az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2$ határok között,
- c) az $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola alatti területet az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2$ határok között!

60. Adjuk meg az f függvénynek az a és b helyhez tartozó integrálfüggvényét.

$$f(x) = 2x + 10 \quad a = -5 \quad b = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 5 \quad a = 1 \quad b = -4$$

61. Melyik az $f(x) = 10x - 7$ függvénynek az a primitív függvénye, amelynek a grafikonja illeszkedik az $A(1, 5)$ pontra?

62. Van-e az $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ függvénynek olyan primitív függvénye, amelynek grafikonja illeszkedik a $B(0, 2)$ pontra?

63. Van-e az $f(x) = \sin x + \cos x$ függvénynek olyan primitív függvénye, amelynek a grafikonja illeszkedik a $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ pontra?

64. Integráljuk parciálisan a következő szorzatokat:

a) $\int x \cdot \sin x \, dx;$

b) $\int x \cdot \cos x \, dx;$

c) $\int x \cdot e^{x+2} \, dx;$

d) $\int x \cdot \ln x \, dx;$

e) $\int \operatorname{arctg} x \, dx;$

f) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx;$

g) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx;$

h) $\int e^x \cdot \sin x \, dx;$

i) $\int e^x \cdot \cos x \, dx;$

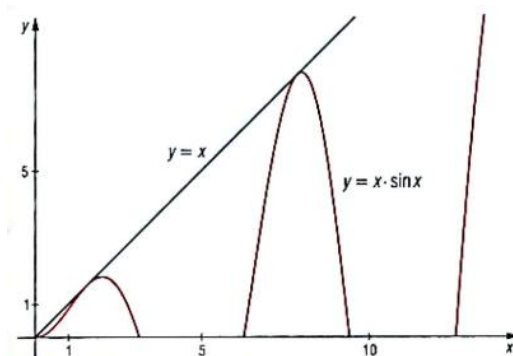
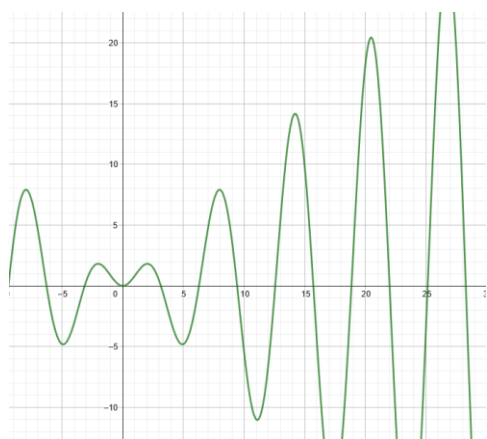
j) $\int x^2 \cdot e^x \, dx;$

k) $\int x^2 \cdot \cos x \, dx;$

l) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx;$

m) $\int x^4 \cdot e^x \, dx.$

65. Tekintsük az $f(x) = x \cdot \sin x$ függvénynek (bal oldali ábra) a koordináta-rendszer első síknegyedével alkotott metszetét! Hányadik dombocskája területe lesz először nagyobb 1000-nél?



66. Forgassuk meg az $f(x) = x^3$ függvény görbéjének a $[0, 2]$ intervallum feletti részét az y tengely körül, majd határozzuk meg a kapott test térfogatát.

67. Határozzuk meg a $k > 1$ számot úgy, hogy az $y = x^2 + 3x + 4k$ és az $y = kx^2 + 3x + 4$ parabolák által közrefogott terület $\frac{32}{3}$ legyen.

IV. Logika

1. Egy bolondokházában négyféle emberrel találkozhatunk. Vannak egészségesek, akik meg tudják különböztetni az igaz és a hamis dolgokat, és vannak betegek, akik pontosan fordítva gondolják: az igazat hamisnak és a hamisat igaznak vélik. Másrészt a lakók egy része ápolat, a többiek orvosok. Sajnos lehetnek az intézetben egészséges ápolatok és beteg orvosok is. A bolondokházában Jani kijelenti: „Nem vagyok egészséges orvos.” Mi Jani: a) beteg ápolat, b) egészséges ápolat, c) beteg orvos, d) egészséges orvos?
2. Tizenegyedik évfolyam elején az osztályba négy új diák érkezett. Keresztneveik: Emma, Tivadar, Konrád, Csilla. Vezetékeik: Kis, Nagy, Fekete és Fehér, de ebben a sorrendben egyik vezetéknév sem a sorban megfelelő helyen álló keresztnévhez tartozik. Azt is tudjuk, hogy Tivadar, Fekete és Fehér különböző iskolából érkeztek, valamint Konrád és Emma vezetékei ellentétek. Mi az új tanulók teljes neve?
3. Egy bolondokházában négyféle emberrel találkozhatunk. Vannak egészségesek, akik meg tudják különböztetni az igaz és a hamis dolgokat, és vannak olyanok, akik pontosan fordítva gondolják: az igazat hamisnak és a hamisat igaznak vélik. Másrészt a lakók egy része ápolat, a többiek, orvosok. Sajnos lehetnek az intézetben egészséges ápolatok és beteg orvosok is. A bolondokházában Józsi azt hiszi, hogy Jani beteg, Jani pedig azt, hogy Józsi orvos. Mit tudhatunk meg ebből Janiról és Józsiról?
4. Adjuk meg formulával az alábbi kijelentéseket. Használjuk az A, B, C, D betűket, a logikai műveleteket és zárójelet. a) Nem vagyok hazudós. b) Kimegyünk a strandra és megiszunk egy bambit. c) Ötöst kapok vagy világgá megyek. d) Nyerek a lottón és gazdag leszek, vagy holnap is bemegegyek dolgozni. e) Nem igaz, hogy ronda és kopasz vagyok. f) Jó vagyok matekból és fizikából, de nem vagyok jó se németből, se biológiából. g) Holnap kirándulni megyünk és hegyet mászunk, vagy csak ülünk a tv előtt és eszünk.
5. Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását. a) Nem félek a dolgozattól. b) Minden filmet láttam már. c) Minden szarka farka tarka. d) Van rövid nyakú zsiráf, amely jól fészült. e) Létezik olyan geometriai rendszer, amelyben a háromszög belső szögeinek összege nem 180° . f) Minden érettségi feladatsorban van ilyen feladat. g) Létezik holló, amely nem fekete. h) Egyik 7-tel osztható szám sem osztható 5-tel. i) Bármely két egyenes metszi egymást.
6. Jelölje A = hideg van, B = jól felöltözöm, C = fádom, D = mozogni kell kijelentéseket. Írjuk le szöveggel a következőket: a) $A \wedge C$ b) $B \vee D$ c) $D \wedge \neg C$ d) $\neg(C \wedge D) \vee B$ e) $(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg D)$
7. Ma kedd van. Melyik kijelentés igaz és melyik hamis? a) Ma nincs hétvége. b) Ma vasárnap van vagy hétköznap. c) Holnap kedd van vagy ma hétfő. d) Holnap szerda van és ma csütörtök. e) Tegnap hétköznap volt és holnap nem lesz hétvége. f) Holnap péntek lesz, vagy tegnapelőtt hétvége volt vagy csütörtök.
8. Az alábbi mondatok közül melyik a „Zsoltinak matematikából minden jegye ötös.” kijelentés tagadása? a) Zsoltinak matematikából csak hármasai vannak. b) Zsoltinak matekból van ötösnél rosszabb jegye is. c) Zsoltinak matekból két hármasa van és biológiából megbukott félévkor. d) Zsoltinak nincs ötöse matekból.
9. Keressük meg, melyik kijelentésnek melyik a tagadása. A = Minden egész szám osztható hárommal. B = Van olyan egész szám, amely osztható hárommal. C = Egyetlen egész szám sem osztható hárommal. D = Van olyan egész szám, amely nem osztható hárommal.

10. A De Morgan-azonosságok segítségével fogalmazzuk át a következő kijelentéseket. a) Nem igaz, hogy jól biliárdozok és golfozok. b) Nem, igaz, hogy a neved Kata vagy Klára. c) Nem vagyok James és nem vagyok Bond. d) Nem megyek a boltba vagy nem porszívózok fel.

11. Fogalmazzunk meg kijelentéseket, melyeknek negációja a következő: a) Van olyan nap, amelynek egy bizonyos órája egyik percben nem gondolok rád. b) Létezik együttes, amelynek minden számában van olyan versszak, amit nem értek. c) Minden ételnek van olyan elkészítési módja, melyet egy bizonyos napszakban nem vagyok hajlandó megenni.

12. Értékeljük ki a következő kijelentések logikai értékét minden lehetséges esetben. a) Nem igaz, hogy Karcsi korán kelt és sokat dolgozott. b) Ez a labda gömbölyű és piros, vagy én színvak vagyok. c) A színházi előadás rövid vagy izgalmas, és nem alszom el közben.

13. Értékeljük ki igazságtáblázat segítségével a következő logikai formulákat.

a) $A \wedge (\neg B)$

b) $(A \wedge B) \vee \neg A$

c) $A \wedge (B \vee \neg A)$

14. Írjuk fel az A, B, C, D betűk és logikai műveletek felhasználásával a következő kijelentéseket. Ugyanazon kijelentésekre azonos betűket használjunk az e) és f) feladatokban. a) Ha Dezső felkér, akkor elmegyek vele táncolni. b) Ha Xénia rám kacsint vagy dob egy puszit, akkor meghívom cukrászdába. c) Akkor veszek nagykabátot, ha hideg van és esik az eső. d) Ha megtanulok úszni, akkor csak a Tiszát úszom át, de a Balatont soha. e) Akkor és csak akkor fáj a lábam, ha ráléptek vagy ha bokán rúgysz. f) Ha rálépnek vagy bokán rúgysz, akkor fáj a lábam, és ha fáj a lábam, akkor ráléptek vagy bokán rúgtál. g) Pontosan akkor félek, ha sötét van.

15. Az alábbi kijelentések csak négyszögekről szólnak. Használjuk a következő jelöléseket: N = négyzet, P = paralelogramma, R = rombusz, E = két-két szemközti oldala egyenlő, K = két-két szomszédos oldala egyenlő, T = szögei egyenlők. Fordítsuk le „magyarra” az alábbi kijelentéseket, majd döntsük el, igazak-e vagy sem.

a) $N \Rightarrow P$ b) $P \Rightarrow R$ c) $P \Leftrightarrow E$ d) $(E \wedge K) \Rightarrow R$ e) $(E \wedge K \wedge T) \Rightarrow N$ f) $N \Leftrightarrow (R \wedge T)$

16. Az alábbi kijelentések n pozitív egész számokra vonatkoznak: A = n 3-mal osztható. B = n 8-cal osztható. C = n 24-gyel osztható. D = n páros. E = n osztható 12-vel. F = n prím. Fogalmazzuk meg szövegesen a következő formulákat: a) $(A \wedge B) \Rightarrow C$ b) $D \Rightarrow \neg F$ c) $(A \vee B) \Leftrightarrow E$ d) $(F \wedge \neg A) \Rightarrow D$ Adjuk meg a formulák logikai értékét.

17. Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását (negációját)! A = Minden emlősnek van lába. B = Minden bogár rovar. C = Minden négyszögnek van beírt köre. D = Minden lakás minden szobájában van világítás.

18. Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását (negációját)! A: Van olyan rombusz, amely nem négyzet. B: Van olyan paralelogramma, amely nem trapéz. C: Van olyan sorozat, amely nem korlátos. D = Van olyan ember, aki nem iszik alkoholt.

19. Fogalmazzuk meg a következő kijelentések tagadását (negációját)! A = Esik az eső, vagy süt a nap. B = Andrea szőke és kék szemű. C = Az ABC háromszög egyenlő szárú és hegyesszögű háromszög. D = Az ABCD négyszög trapéz vagy deltoid.

20. Tekintsük a következő kijelentéseket: A = esik az eső, B = rossz a kedvem.

Írjuk fel $\wedge$, $\vee$, $\neg$ logikai műveletek segítségével a következő kijelentéseket: a) Nem esik az eső.

b) Esik az eső, és rossz a kedvem. c) Nem esik az eső, mégis rossz a kedvem. d) Nem rossz a kedvem, és nem esik az eső. e) Esik az eső, mégsem rossz a kedvem. f) Esik az eső, vagy rossz a kedvem. g) Nem esik az eső, vagy rossz a kedvem.

21. Az alábbi állítások között melyek az ekvivalensek, illetve melyikből következik valamelyik másik: A = Az ABCD négyszög középpontosan szimmetrikus. B = Az ABCD négyszög trapéz. C = Az ABCD négyszög paralelogramma.

22. Írjuk fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket, ha A = tél van, B = esik a hó! a) Ha tél van, akkor esik a hó. b) Ha esik a hó, akkor tél van. c) Ha nem esik a hó, akkor nem tél van. d) Nem igaz, hogy tél van, és nem esik a hó. e) Esik a hó, vagy nem tél van.

23. Tekintsük a következő kijelentéseket: A = n osztható legyen 5-tel, B = n osztható 3-mal, C = n osztható 15-tel. Fogalmazzuk meg a következő kijelentéseket szavakkal:

$$\text{a) } C \Rightarrow A \quad \text{b) } C \Leftarrow (A \wedge B) \quad \text{c) } (A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg C \quad \text{d) } \neg C \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

24. Tekintsük a következő kijelentéseket: A = az ABCD négyszög húrnégyszög, B = az ABCD négyszög téglalap. Írjuk fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket: a) Ahhoz, hogy az ABCD négyszög téglalap legyen, szükséges, hogy húrnégyszög legyen. b) Ahhoz, hogy az ABCD négyszög húrnégyszög legyen, elegendő, hogy téglalap legyen.

25. Tekintsük a következő kijelentéseket: C = az ABC háromszög derékszögű, D = az ABC háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével. Írjuk fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket: a) C elegendő feltétele a D-nek. b) D elegendő feltétele az C-nek. c) D szükséges feltétele az C-nak. d) C akkor és csak akkor teljesül, amikor a D.

26. Tekintsük a következő kijelentéseket: A = az a_n sorozat korlátos, B = az a_n sorozat konvergens. Írjuk fel logikai műveletekkel a következő kijelentéseket: a) az A elegendő feltétele a B-nek. b) A B elegendő feltétele az A-nak. c) A B szükséges feltétele az A-nak. d) Az A szükséges feltétele a B-nek. e) Az A akkor és csak akkor teljesül, amikor a B. Mely állítások igazak a fentiek közül.

27. Egy papíron az alábbi állítások olvashatóak: „1. Ezen a papíron pontosan egy állítás hamis. 2. Ezen a papíron pontosan két állítás hamis. 3. Ezen a papíron pontosan három állítás hamis. 4. Ezen a papíron pontosan négy állítás hamis. 5. Ezen a papíron pontosan öt állítás hamis.” Határozzuk meg, hogy mely állítások igazak a papíron!

28. Lássuk be igazságtáblázattal, hogy

$$\text{a) } A \Rightarrow B = (\neg B) \Rightarrow (\neg A) \quad \text{b) } (A \Rightarrow B) \Rightarrow C = (\neg A) \Rightarrow (C) \wedge (B \Rightarrow C)$$

29. Igaz vagy hamis a következő kijelentés: „Ez az állítás hamis.”

30. A négy közül melyik logikai formula ekvivalens a $\neg(A \vee \neg B)$ kifejezéssel?

$$\neg A \vee B \quad \neg A \wedge B \quad A \wedge \neg B \quad \neg(A \wedge \neg B)$$

31. Melyik igaz, melyik hamis a következő végtelen sok állítás közül?

1. A következő mondatok mindegyike hamis.
2. A következő mondatok mindegyike hamis.
3. A következő mondatok mindegyike hamis.
4. ...
5. ...

32. Egy könyvtár egy könyvben nyilvántart (felsorol) minden könyvet, amely nem hivatkozik önmagára. Ez a nyilvántartás (mint könyv) szerepel-e ebben a nyilvántartásban, azaz ebben a könyvben?

33. Egy faluban van egy borbély, aki azt mondja: „Minden olyan férfit megborotvállok, aki nem borotválja meg önmagát.” Ki borotválja meg a borbélyt?

34. Egy tanár azt mondja: „A jövő héten váratlan dolgozatot írtok. Olyan napon, amikor nem számíthatok rá.” A diákok végig gondolják:

Pénteken nem lehet, mert ha addig nem volt, biztosan pénteken lesz, tehát nem váratlan. Csütörtökön se lehet, mert ha addig nem volt, akkor csütörtök az utolsó lehetőség, ez szintén nem váratlan. Stb. Így kizárják az összes napot.

Am a tanár mégis dolgozatot írat szerdán – és a diákok meglepődnek.
Hogyan történhetett ez?

35. Értékeljük ki a következő kijelentések logikai értékét minden lehetséges esetben.

1. Nem igaz, hogy Karcsi korán kelt és sokat dolgozott.
2. Ez a labda gömbölyű és piros, vagy én színvak vagyok.
3. A színházi előadás rövid vagy izgalmas, és nem alszom el közben

36. Fogalmazzuk meg a következő kijelentések negációját.

1. Minden feladat könnyű volt és mindet meg is oldottam.
2. Ebben a pizzériában minden pizza finom, vagy van olyan, amit még nem kóstoltunk meg.
3. Létezik olyan háromszög, amelynek minden szöge derékszög.
4. Minden Rubik kockának van olyan oldala, amelyre teljesül, hogy az azon levő összes négyzet kék.

V. Gráfok

Definíciók

Gráf Ha véges sok pont közül egyeseket vonallal összekötünk, akkor a kapott ábrát gráfnak nevezzük.

Pont, él A pontok a gráf csúcsai vagy szögpontjai, a vonalak a gráf élei.

Teljes gráf Ha egy gráfnak n pontja van (n pozitív egész szám), és mindegyik pontból pontosan egy-egy él vezet az összes többi ponthoz, akkor a gráfot n pontú teljes gráfnak nevezzük. Például az első és a negyedik gráf.

Hurok A gráfokban előfordulhat olyan él is, amelynek mindkét végpontja ugyanaz a pont. az ilyen él neve hurok.

Többszörös él Két csúcs között több élt is húzhatunk, ezek a többszörös élek.

Egyszerű gráf Egy gráfot egyszerűnek nevezünk, ha nincs benne sem hurok, sem többszörös él.

Összefüggő gráf Egy gráf összefüggő, ha bármely pontjából bármely másik pontjába élek egymásutánja mentén el lehet jutni.

Fokszám A gráf egy pontjára illeszkedő élek számát a pont fokszámának, röviden fokának nevezzük. A hurokért úgy tekintjük, hogy kétszeresen illeszkedik a pontjára.

Út Az élek olyan egymáshoz csatlakozó sora, amely egyetlen ponton sem halad át egynél többször.

Vonal A gráf csúcsainak és éleinek azt a sorát, amelyben az élek ezen pontokat kötik össze és az élek nem ismétlődnek, egy csúcs azonban többször is előfordulhat. A vonal zárt, ha kezdő- és végpontja egybeesik, egyébként nyílt.

Kör Olyan vonal, melynek kezdő- és végpontja azonos és a pontok nem ismétlődnek.

Euler-vonal A gráf összes élét pontosan egyszer tartalmazó vonal. Lehet zárt és lehet nyílt. Zártnál nincs kezdő- és végpont (egybeesik), a nyíltnál két különböző pont van a vonal két végén.

Izomorf gráfok Két gráfot izomorfnek nevezünk, ha pontjaik és éleik kölcsönösen, egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetők egymásnak.

Fa Olyan összefüggő gráf, amely nem tartalmaz kört.

Tételek

1. Bármely gráfban a fokszámok összege egyenlő az élek számának kétszeresével.
2. Bármely gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.
3. Véges, egyszerű gráfban van két pont, amelyek fokszáma megegyezik.
4. Ha egy összefüggő és kört tartalmazó gráf bármely köréből egy tetszőleges élt elhagyunk, akkor a gráf összefüggő marad.
5. Ha egy legalább kétpontú, összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint pontja, akkor a gráfnak van elsőfokú pontja.
6. Ha egy gráf összefüggő, akkor a pontjait két diszjunkt csoportba sorolva a gráfnak van olyan éle, amelynek az egyik végpontja az egyik, a másik végpontja a másik csoportba tartozik.
7. Az n pontú összefüggő gráf legalább $n-1$ élt tartalmaz.
8. Ha egy összefüggő gráf n pontot és $n-1$ élt tartalmaz, akkor nem tartalmaz kört (azaz fa).
9. Egy n pontú fának $n-1$ éle van.
10. A fa
 - a) a maximális körmentes gráf (azaz, ha bármely két olyan pontját összekötjük, melyek között nem volt él, akkor a gráf már tartalmaz kört,
 - b) bármely két pontját egyetlen út köti össze,
 - c) a minimális összefüggő gráf (azaz bármely élt elhagyjuk, akkor a gráf már nem összefüggő).

Feladatok

1. Egy ötcsúcsú gráf pontjainak fokszáma 3, 3, 3, 1, 2. Szemléltesse a gráfot!
2. Egy egyszerű gráfban 5 csúcs van, amelyekből rendre 4, 3, 2, 2, 1 él indul ki. Hány éle van a gráfnak?
3. Legalább hány éle van annak a gráfnak, amelynek 3 csúcsa van és összefüggő?

4. Egy találkozón hat ember vett részt, a résztvevők egyharmada 5, ketten közülük 3, a többiek pedig 2 emberrel fogtak kezét. Szemléltesse rajzzal a kézfogásokat.
5. Rajzoljon ötpontú gráfot, melyben az egyes pontokból induló élek szám
a) 2, 2, 2, 2, 2, b) 2, 2, 2, 3, 3, c) 2, 2, 3, 3, 3!
6. Egy találkozón tizenketten vettek részt. Hatan közülük három emberrel fogtak kezét, ketten közülük öttel, míg négyen hat emberrel fogtak kezét. Hány kézfogás volt?
7. Egy találkozón hat ember vett részt. Megtörténhettek-e a következő kézfogások: a) A társaság egyik fele 5 emberrel, míg a másik fele 3 emberrel fogott kezét. b) A résztvevők egyharmada 5, a másik harmada 3, míg egy-egy ember 1, illetve 2 emberrel fogott kezét.
8. Igazolja, ha egy 5 pontú gráfban minden pontból legalább 2 él indul, akkor a gráfban van kör! (Azaz élek olyan sorozata, amelyen vissza lehet térni a kiindulási pontba anélkül, hogy egy élen kétszer haladnánk át.)
9. a) Igazolja, hogy ha egy 6 pontú gráfnak legfeljebb 4 éle van, akkor a gráf nem összefüggő! (Azaz nem lehet bármely pontból bármely másikba eljutni élek mentén.) b) Igazolja, hogy ha egy 6 pontú gráfnak legalább 6 éle van, akkor a gráfban van kör! (Azaz élek olyan sorozata, amelyen vissza lehet térni a kiindulási pontba anélkül, hogy egy élen kétszer haladnánk át.)
10. Igazolja, hogy ha egy 10 pontú gráfnak 9 éle van, akkor van olyan pontja, amelyből 1 vagy 0 él indul!
11. Egy bajnokságban 8 csapat játszik körmérkőzést, eddig 9 meccs zajlott le. Bizonyítsa be, hogy van olyan csapat, amely legalább háromszor játszott már!
12. a) Négy szomszéd mindegyike úgy épített utat a másik három házához, hogy azok nem keresztezik egymást. Vázoljon egy lehetséges úthálózatot! b) Egy ötödik ember tud-e úgy utakat építeni házatól a másik négy házához, hogy az úthálózatban ne legyenek kereszteződések?
13. Van-e olyan 8 fős társaság, amelyben a társaság mindegyik tagjának pontosan 3 haragosa van jelen? (A harag kölcsönös.)
14. Egy konvex 77-szög összes átlóját meghúzzuk, majd közülük egyeseket pirosra színezzük. a) Hány átlót húztunk meg? b) Lehetséges-e, hogy a sokszög minden csúcsában pontosan 13 piros átló fut be?
15. A, B, C, D, E és F pontokat tetszés szerint vonalakkal kötünk össze. Ezek lehetnek önmagába visszatérő vonalak is, és 2 pont között több vonalat is húzhatunk. Az első öt pontból kiinduló vonalak száma rendre 7, 2, 5, 4, 2. Csak azt tudjuk, hogy F-ből 3 vagy 4 vonal indul. Melyik lehet a helyes eredmény? Válaszát indokolja!
16. Egy 7 tagú társaságban (kölcsönös) barátságok vannak. Az egyes tagoknak a következő barátai vannak: Andrásnak 3 barátja van, Bélának 2, Csabának 5, Daninak 1, Ervinnek 4, Ferinek 5, Gábornak szintén 4. a) Rajzoljon olyan gráfot, amely a társaság barátságait ábrázolja! b) Az összes lehetséges barátságnak hány százaléka valósul meg ebben a csoportban?
17. Egy sakkversenyen bármelyik két játékos legfeljebb egyszer játszott egymással. Igaz-e, hogy a verseny bármely pillanatában volt két olyan versenyző, aki addig ugyanannyi lejátszott mérkőzésnél tartott? (Az éppen tartó mérkőzéseket nem tekintjük lejátszottnak.)

- 18.** Bizonyítsa be, hogy nincs olyan 8 személyből álló társaság, amelyben az embereknek rendre 7, 7, 7, 6, 6, 6, 4, 4 ismerősük volna! (Az ismeretségek kölcsönösek.)
- 19.** Bizonyítsa be, hogy nincs olyan 9 személyből álló társaság, ahol az embereknek rendre 8, 8, 8, 7, 7, 7, 5, 4, 4 ismerősük volna! (Az ismeretségek kölcsönösek.)
- 20.** Nyolc sakkozó körmérkőzést játszik. Hány mérkőzést játszottak le, ha tudjuk, hogy négy sakkozó mindegyike már három, négy sakkozó mindegyike pedig már négy mérkőzést játszott le?
- 21.** Tudjuk, hogy egy társaságban mindenkinek legalább két ismerőse van. Bizonyítsa be, hogy ekkor a társaságnak legalább három tagját le lehet ültetni egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a mellett ülőket!
- 22.** Nyolc telefonközpont közötti kapcsolatrendszerrel a következőket tudjuk: 1. bármely két központ között létesíthető kapcsolat 2. bármelyik két különböző vonal tönkremenése esetén is még összefüggő a maradék rendszer, de egy harmadikat elhagyva már nem, 3. a három legnagyobb központ egymást közvetlenül is el tudja érni. Rajzoljon a feltételeket megvalósító hálózati gráfot minél kevesebb éllel!
- 23.** Egy hatpontú egyszerű gráfban van izolált pont. Legfeljebb hány éle lehet?
- 24.** Hány olyan lényegesen különböző, négycsúcsú egyszerű gráf van, amelynek három éle van?
- 25.** Egy egyszerű gráfnak 5 csúcsa van. Minden csúcsban összeszámoljuk a befutó éleket. Előfordulhat-e, hogy ez a szám minden csúcsban különböző legyen?
- 26.** Egy hatfős társaság tagjai közül egyesek kézfogással üdvözlik egymást. Lehetséges-e, hogy az egyes emberek kézfogásainak száma: 0, 1, 2, 2, 4, 5? (Válaszunkat indokoljuk!)
- 27.** Egy házibulin 5 fiú és 5 lány vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy az este folyamán hány különböző partnerrel táncolt. A cédulákon a következő számok szerepeltek: 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4. Lehetséges ez? (Csak ellenkező neműek táncoltak egymással. Válaszunkat indokoljuk!)
- 28.** Egy turista bejárta egy város 6 utcáját úgy, hogy mindegyiken pontosan kétszer ment végig, de úgy nem tudta bejárni őket, hogy mindegyiken csak egyszer menjen végig. Lehetséges volt-e ez akkor, ha az utcák között lehet zsákutca? (Válaszunkat indokoljuk!)
- 29.** 16 focicsapat körmérkőzéses tornán vesz részt. Bizonyítsuk be, hogy a torna bármely pillanatában van két olyan csapat, akik addig azonos számú mérkőzés játszottak le!
- 30.** Tíz csapat körmérkőzéses bajnokságban vesz részt. 11 mérkőzést már lejátszottak. Igazoljuk, hogy van olyan csapat, amelyik már legalább 3-szor játszott!
- 31.** Egy körmérkőzéses bajnokságban 16 csapat vesz részt. A bajnokságban 35 meccset már lejátszottak. Igazoljuk, hogy van olyan csapat, amelyik már legalább 5 mérkőzést lejátszott!
- 32.** Péternek 28 osztálytársa van. Mind a 28-nak különböző számú barátja van az osztályban. Hány barátja van közülük Péternek? (A barátság kölcsönös.)
- 33.** Egy 18 résztvevős bajnokságban eddig 8 fordulót rendeztek: mindegyik csapat 8 másikkal játszott. Igazoljuk, hogy van 3 olyan csapat, amelyek között még egyetlen mérkőzés sem volt!

34. Igaz-e, hogy ha egy egyszerű gráf minden csúcsának foka kettő, akkor a gráfban van kör?

35. Rajzoljunk olyan gráfot, amelynek 8 csúcsa van, 12 éle és minden csúcs fokszáma 3!

36. Egy kisváros hét nevezetességét és az azok közötti úthálózatot látjuk a táblán. Minden nevezetességnél található egy-egy étterem. Egy turistacsoport reggel az F nevezetességnél gyülekezett és vezetőjükkel úgy akarták végigjárni az összes nevezetességet, hogy minden úton pontosan egyszer haladjanak végig, majd az utolsó nevezetességnél megebédeljenek.

a) Tervezzük meg a csoport útvonalát és mondjuk meg, melyik nevezetesség étterménél rendeljék meg az ebédet?

b) Egy hét múlva egy másik csoport is bejárta a nevezetességeket a kívánt módon, de időközben az FG utat lezárták. Ők melyik étteremben ebédelhetnek?

c) Egy 12 pontú egyszerű összefüggő gráfnak 48 éle van. Lehet-e ennek a gráfnak 2 db olyan pontja, melyekből csak egy él indul ki?

37. Döntsd el, hogy az alábbi négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis.

A. Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van.

B. Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.

C. Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.

D. Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.

38. Egy közösségi portál hatfős klubjába a klubalapító András hívott meg mindenkit. Rajta kívül János ismeri még Csillát és Edinát, Csilla pedig Zolit és Gábort.

a) Ábrázoljuk gráffal a fenti ismeretségeket.

b) Időközben kiderült, hogy két klubtag eltitkolt egy ismeretséget és egyedül Edinának van a klubban a legkevesebb ismerőse. Hát kik titkolóznak eddig?

39. Budapest egy részletének térképén tekintsük a kereszteződéseket pontoknak, a közöttük futó utakat éleknek. Készítsünk kimutatást arról, hogy milyen fokszámú pontokból hány látunk.

40. Egy n pontú egyszerű gráfban n él van. Hány élt kell még berajzolnunk, hogy n pontú teljes gráfot kapjunk? (n pozitív egész szám)

41. A, B, C, D pontok a síkon. Hány különböző egyszerű gráfot készíthetünk a négy pontból, ha

a) sem a pontokat, sem az éleket nem különböztetjük meg?

b) kételtű különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik végpontját más?

42. Lehetséges-e, hogy egy n pontú egyszerű gráfban a pontok fokszámai különböző, de egymás után következő egész számok?

43. Adjunk meg elégséges feltételt fog számok segítségével arra, hogy az egyszerű n pontú gráf

a) nem összefüggő, b) összefüggő.

44. Ábrázoljuk az összes lehetséges 7 pontú fagráfot, amelyben a pontok fokszámai 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3.

45. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú gráf fokszámainak összege $2n$, akkor a gráfban van kör.

VI. Valószínűségszámítás

1. Két szabályos kockával dobunk. a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok között van 2-es vagy 3-as? b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az összeg 2-vel vagy 3-mal osztható? c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a szorzat 2-vel vagy 3-mal osztható?
2. Ha van háromfajta vetőmagunk, amelyek rendre 0,85; 0,78; 0,4 eséllyel kelnek ki, s ezekből egyet véletlenszerűen választunk ki, akkor mennyi az esélye annak, hogy nem kel ki a mag?
3. András meghívja barátnőjét vacsorára egy budapesti étterembe, este 7 órára. Mivel három úton is megközelítheti autójával az éttermet, egy véletlen kísérlettel dönti el, hogy melyik utat válassza. Feldob egy dobókockát, és ha 1-et kap eredményül, akkor a harmadik utat választja, ha párosat, akkor az elsőt, ha páratlan prímszámot dob, akkor a másodikat. Mekkora az esélye annak, hogy időben odaér a randevúra, ha az egyes utakon rendre 0,2; 0,4; 0,8 eséllyel kerül dugóba?
4. Valamely üzletbe négy termelőtől összesen 1800 kg burgonyát vásárolnak fel. A felvásárolt mennyiség negyedrésze az első, hatodrésze a második, harmadrésze a harmadik, a többi a negyediktől származik. Az első termelő burgonyájának kilenced része, a másodikénak fele, a harmadikénak a harmada, a negyediknek az ötöde az I. osztályú. A raktárban a burgonyát ömlesztve tárolják. a) Mennyi az esélye annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott burgonya I. osztályú? b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen választott I. osztályú burgonya a harmadik termelőtől származik?
5. Egy dobozban 3 kék, 4 sárga és 5 zöld golyó van. Visszatevés nélkül húzunk. a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy először kék, utána sárga golyót húzunk? b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 2. golyó sárga? c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 3. golyó sárga?
6. Egy bevásárlóközpont I. emeletén felállítottak egy szerencsekereket, melyen 1-től 40-ig lehetett a kerék megforgatásával egész számokat „eltalálni.” Azok a vásárlók forgathatták meg a kereket, akik egy bizonyos összegnél nagyobb összeget költöttek vásárlásra. Ha a vásárló négyzetszámot talált, akkor 10 000 Ft jutalmat kapott.
a) Egy napon 10 és 11 óra között 8 vásárló forgathatta meg a szerencsekereket. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első, a második és a hatodik vásárló nyert 10-10.000 Ft-ot?
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a 8 vásárló közül pontosan hárman nyertek?
c) A II. emeleten is felállítottak egy ugyanilyen szerencsekereket. Ezen akkor lehetett nyerni, ha valaki prímszámot „forgatott”; ekkor 5.000 Ft-t nyert a szerencsés vásárló. Egy napon délután 2 és 3 között az I. emeleten 10-en, a másodikon pedig 12-en forgatták meg a szerencsekereket Melyik valószínűség nagyobb: az, hogy az első emeleten fizettek ki pontosan 20 e Ft-ot, vagy, hogy a II. emeleten fizettek ki pontosan 20 e Ft-ot nyereményre?
7. Magyarországon a gépkocsik rendszámablája három betűből és három számjegyből áll. A betűkhöz az ABC 25 betűjét használják fel. a) Hány autót láthatnak el ilyen módon rendszámablával? b) Tetszőlegesen kiválasztva egy rendszámablát, mekkora annak a valószínűsége, hogy azon lesznek azonos számjegyek?
8. a) Egy 27 fős osztályba 5-tel több lány jár, mint fiú. Mekkora a valószínűsége, hogy véletlenszerűen kiválasztott három tanuló között két fiú és egy lány van?

b) Egy 27 fős osztályból kiválasztunk két tanulót. Határozzuk meg az osztályban a fiúk számát úgy, hogy a legnagyobb valószínűsége legyen annak, hogy a kiválasztott tanulók különböző neműek. Mekkora ez a maximális valószínűség?

9. Egy urnában számjegyek vannak: 1-esek, 2-esek, 3-asok és 4-esek. Véletlenszerűen kiveszünk egy számjegyet az urnából. Annak a valószínűsége, hogy a kivett számjegy legalább három: $\frac{17}{30}$. Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számjegy legfeljebb három: $\frac{23}{30}$. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kihúzott számjegy három?

10. András és Béla nagyon sokat pingpongoznak egymással. A tapasztalat azt mutatja, hogy András 0,7, Béla 0,3 valószínűséggel nyer meg egy játékot. Ha többször játszanak, akkor azt tekintjük győztesnek, aki többször nyert.

a) Mekkora András nyerési esélye, ha négyszer játszanak?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Béla minden játékot megnyer, ha háromszor játszanak?

c) András győzelmi esélye 0,7 helyett mennyi, ha két játék esetén Béla ötkilenced valószínűséggel nem veszít?

11. Van egy kétoldalú érménk, amelyen pontosan szabályozható, hogy egy feldobásnál melyik oldal mekkora valószínűséggel következik be. Milyen valószínűséggel legyen egy feldobás eredménye írás, ha azt szeretnénk, hogy az írás maximális valószínűséggel következzen be hat dobásból ötször?

12. Az 52 lapos francia kártyából egyszerre kihúzunk 6 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) A pikk bubi a lapok között van?

b) minden kihúzott lap azonos színű? (A francia kártyában 4 szín van.)

c) a lakók között van treff?

d) treff vagy káró közül legalább az egyik fajtából van a lapok között?

e) legalább 2 ász van a lapok között?

f) minden lap különböző figurájú

13. Az ELTE tanárszakos hallgatóinak 70 százaléka megszerzi a diplomát, de a diplomásoknak csak 50 százaléka helyezkedik el pedagógus pályán. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első évre beiratkozott 40 hallgató közül

a) legfeljebb három hallgató nem szerez diplomát?

b) legalább huszonnégyen, de legfeljebb huszonhatan fognak pedagógusként dolgozni?

Geometriai valószínűség

14. Egy számegyenesen kijelöltük a $J = [0, 10]$ intervallumot és annak $I = [2, 6]$ részhalmazát. Véletlenszerűen rádobunk egy pontot J -re. a) Mekkora valószínűséggel esik a pont az I intervallumba?

15. és a „lyukas” téglalapot az ágyra tesszük. Magasról ráejtünk egy golyót a téglalapra. Mekkora valószínűséggel hallunk koppanást?

16. Hány százaléka legyen a céltábla sugarának a középső kör sugara, ha azt akarjuk, hogy a céltáblát érő véletlen találatok esetén a maximális pontszám valószínűsége 0,01 legyen?

17. Tekintsük az $A(-4, -3)$, $B(4, -3)$, $C(4, 3)$, $D(-4, 3)$ csúcsokkal adott téglalapot. Válasszunk véletlenszerűen egy $P(x,y)$ pontot az ABCD téglalapból. Mennyi a valószínűsége, hogy ekkor a pont koordinátáira $|x| + |y| \leq 2$?

18. Két ember megbeszéli, hogy egy adott napon 16 és 17 óra között találkoznak Budapesten az Oktogonnál. Az adott időintervallumban véletlenszerűen érkeznek a helyszínre. Mekkora a valószínűsége, hogy egyikük sem vár 10 percnél többet?

19. A buszmegállóban a kiírás szerint két különböző buszjárat áll meg. Egy busz átlagosan 30 másodpercet tartózkodik a megállóban. Jó közelítéssel feltételezzük, hogy a buszok egyenletes eloszlás szerint érkeznek a $[0, 10]$ perces intervallumon belül bármikor. Mekkora eséllyel fordul elő, hogy a megállóban mindkét járat egy adott pillanatban együtt áll bent?

20. Jancsi és Juliska összeházasodtak és a mézeskalács házba költöztek. Mindketten 6.30-kor kellene és 7.40-ig be kell fejezniük a reggeli készülődést, hogy odaérjenek a munkahelyükre. Juliusának 30 perc, Jancsinak 10 perc a fürdőszobai elfoglaltsága. A ház finom, ám kicsi, egyszerre csak egyikük fér el a fürdőben. Mindketten véletlenszerűen mennek be és megharagszanak, ha nem tudnak a másik miatt bejutni. Mekkora valószínűséggel fognak reggelente örömmel búcsút venni egymástól? Feltételezzük, hogy a fürdön kívül más dolgon nem kapnak össze reggelente.

21. A $J = [8,15]$ intervallumon belül úgy szeretnénk kijelölni az I intervallumot, hogy ha véletlenül ráértünk J -re egy pontot, akkor 0,7 valószínűséggel I -re essen. Adjunk meg ilyen I intervallumot.

Várható érték

22. Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége rendre: $P(A)=0,1$, $P(B)=0,2$, $P(C)=0,3$, $P(D)=0,4$. Az egyes A , B , C , D esetekben a játékos nyereménye 1, -2, 3, -4 pont. Érdemes-e ebben a játékban részt venni?

23. Határozzuk meg a kockadobás várható értékét.

24. Egy játékban két játékos játszik egy hagyományos érmét feldobva. Ha fej, akkor A 10 eurót fizet B-nek, ha írás, akkor B fizet A-nak 8 eurót. Mennyi a várható nyeremény a) A szempontjából, b) B szempontjából?

25. Egy napon egy ötöslottó-szelvény ára 225 Ft volt. Az ötödik héten 1145 Ft-ot fizettek ki a kettésekre, 17690 Ft-ot a hármasokra, 2 127 600 Ft-ot a négyesekre, és 675 millió volt a főnyeremény. Megérte ezen a héten lottózni?

26. Dani a diáknapi egy egyszerű játékot talált ki. A játékos dob egyet a hagyományos kockával. Ha ötöst vagy hatost dob, akkor Dani fizet neki 6 játékeurót. Mennyiért árulja Dani a játékot, ha csak a játék kedvéért csinálja (hosszú távon nem akar sem veszteséget, sem nyereséget)?

27. Egy játékban a négy lehetséges kimenetel valószínűsége: $p_1=0,4$, $p_2=0,3$, $p_3=0,2$, $p_4=0,4$. A játékos nyereménye 1, -2, 3, -4 pont lehet. a) Hozzárendelhetjük-e úgy az egyes kimenetekhez a nyereményeket, hogy a játékosnak megérje játszani ezt a játékot? b) Mennyi lehet a legnagyobb várható nyeremény ebben a játékban?

28. Egy társasjátékban a szabályos kockával dobva 3 pontot kapunk, ha prímet dobunk, 2 pontot kapunk, ha összetett számot dobunk, és -5 pontot kapunk, ha más dobunk. Várhatóan hány pontot szerzünk egy fordulóban?

29. Egy állítható dobókockával dobva az 1-es, 2-es dobás valószínűsége 0,1–a 0,1, a 3-as, 4-es dobás valószínűsége 0,15–0,15 értékre van beállítva, és az 5-ös, 6-os dobás valószínűsége is ugyanaz. Mennyi egy dobás várható értéke?

30. Egy áruház a beérkezett árut visszatevéses mintavétellel vizsgálja meg, mielőtt átvenné. A legutóbbi 500 darabos szállítmányból is ellenőriztek 40 darabot (tapasztalatból tudják, hogy az érkezett áruból minden 25. hibás). Várhatóan mennyi hibás lesz a kiválasztott mintában?

31. Egy kosárlabda-mérkőzés lelkes közönségét 623 férfi és 377 nő alkotja. A televízióban 20 alkalommal vágják be véletlenszerűen a közönség egy-egy tagját (egy főt akár többször is). a) Mi a valószínűsége annak, hogy a 20 bejátszásból 7 alkalommal mutatnak nőt? b) Mi várható, hány férfi fog feltűnni a képernyőn?

32. Határozzuk meg a 4-et az 50-ből „hagyományos” lottójátékon várható bevételt, ha egy szelvény ára 2 euró, és telitalálatra 1000, 3-asra 500, 2-esre 50 eurót fizet.

33. Egy zacskóban 10 péksütemény van, közülük 4 csokis, a többi lekváros. Jani belenyúl a zacskóba, és kivesz 3 darabot. Így gondolkodik: „a tízes boldogságskálán 8, ha csak csokit vettem ki, 6, ha kettő csokist, 5, ha egy csokist, és 2, ha az összes kivett sütim lekváros”. Határozzuk meg Jani boldogsága mértékének a) várható értékét.

34. Balázs, látva Dani játékának sikerét, jövőre egy másik, hasonló játékot akar szervezni a diáknapra. Danihoz hasonlóan 2 játékeuróért fogja árulni a játékot, amint 6 eurót lehet nyerni. Balázs szeretné, ha játékonként átlagosan 1 játékeuró nyereséget hozna neki a játék. Adjunk neki ötletet, hogyan alakítsa ki a szabályokat: melyik dobott számokra fizessen nyereményt és melyekre ne?

35. Egy edzésre véletlenszerűen érkeznek a játékosok. A késésért percenként 100 Ft a büntetés. Tudjuk, hogy fél óra a maximális késés, azon belül viszont bármennyi lehet, amit egész percre kerekítenek (bármelyik érték egyforma esélyű). Mekkora összegre számíthat hetente a klub, ha 24 játékos és heti öt edzés van?

36. Két kockával dobunk, és a kapott két szám összege (levonva belőle a beszálló összege) lesz a nyereményünk. a) Hány forintot kell fizetni partinként ahhoz (beszálló összeg), hogy ez a játék igazságos legyen, azaz a nyeremény várható értéke nulla legyen?

37. Egy dobozban 4 piros és 2 sárga golyó van. Visszatevés nélkül húzunk addig, amíg az első sárga golyót kihúzzuk. A kísérlet kimenetele az ehhez szükséges húzások száma. Ábrázoljuk az így definiált valószínűségi változó eloszlását, illetve számoljuk ki a várható értékét.

38. Egy dobozban 3 zöld és 3 piros golyó van. A dobozból csukott szemmel, visszatevés nélkül addig húzunk egymás után golyókat, amíg vagy a zöld vagy a piros golyók közül kihúzzuk mind a hármat. Határozza meg a szükséges húzások számának várható értékét!

39. Egy kísérletben feldobnak két szabályos dobókockát. A kísérlet kimenetele a két dobott érték közül a nem nagyobb. Határozza meg a kísérlet kimenetelének várható értékét.

Feltételes valószínűség

40. Annak a valószínűsége, hogy a telefonkönyvből véletlenszerűen kiválasztott személy 120 kilónál többet nyom, meglehetősen alacsony. Ha viszont tudjuk valahonnan, hogy az illető testmagassága meghaladja a 185 centit, akkor ennek az eseménynek a valószínűsége lényegesen nagyobb.

41. Ha két szabályos kockát feldobunk, akkor a dupla hatos valószínűsége $1/36$. Ha viszont valaki elárulta, hogy a dobott számok összege nagyobb 10-nél, akkor ez a valószínűség $1/3$.

42. Egy négytagú családról tudjuk, hogy a két gyerek között legalább egy lány van. Mondjuk, ő Anna. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Anna testvére fiú? Válasz: $2/3$. (Az életkor szerint rendezve a LL, LF, FL lehetőségek vannak.) És ha azt is tudjuk, hogy Anna az idősebb? Válasz: Meglepő módon más eredményt kapunk: $1/2$.

43. Az aulában 3 kávéautomatát állítottak fel. Egy nap átlagosan 25 hallgató használja az első gépet, 45 hallgató a második gépet és 30 hallgató iszik kávé a harmadikból. Az első gép átlagosan 8-szor dob ki üres poharat, a második átlagosan 5-ször nem tölti tele a poharat, a harmadik átlagosan 6-szor túlادagolja a cukrot. Minden más esetben jól működnek a gépek. a) Mennyi az esélye annak, hogy sikerül jó kávé innunk? b) Találomra veszünk egy kávé, ami nem jó. Mennyi az esélye, hogy túl cukros?

44. Két szabályos dobókockát feldobunk egyszerre. a) Mennyi az esélye annak, hogy a dobott számok között lesz az 5? b) És ha tudjuk, hogy a dobott számok összege 8? Megoldás: a) $11/36$; b) $2/5$.

A feltételes valószínűség definíciója

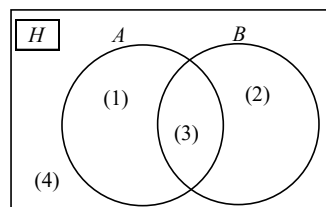
$P(A|B)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B bekövetkezett.

Definíció: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$,

ha $P(B) \neq 0$

Szemléltetés halmazokkal: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$

$$\frac{P((3))}{P((2) \cup (3))} = \frac{(3)}{(2) + (3)}$$



45. Egy üzemben villanykörtéket gyártanak. Az első gép naponta 200-at, a második 150-et, a harmadik 300-at. A gépek rendre 4%, 2% és 3% selejtet gyártanak. Az égőket a nap végén raktárba viszik. Az éjszakai műszak ellenőrzi az izzókat oly módon, hogy egyet találomra kivesznek. Mennyi az esélye annak, hogy a kiválasztott izzó a) világít; b) nem működik, feltéve, hogy az első gép gyártotta; c) nem működik és az első vagy a második gép gyártotta?

46. Egyetemi hallgatók egy csoportjában 10% a balkezes és 8% a rövidlátó, közöttük 2% balkezes és rövidlátó is egyszerre. a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenül választott balkezes rövidlátó is? b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenül választott rövidlátó balkezes is? c) A balkezesség és a rövidlátás független tulajdonságok-e az előző válaszok alapján?

47. Egy főiskolai évfolyam 30%-a fiú. A fiúk 40%-a sportol rendszeresen, a lányok 20%-a.

- Mekkora a valószínűsége annak, hogy taláломra választva egy hallgatót, az sportoló fiú legyen?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy taláломra választva egy hallgatót, az nem sportoló lány legyen?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy taláломra választott hallgató sportoló legyen?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a sportolók között taláломra kiválasztott hallgató fiú?
- Milyen kapcsolat van a nem és a sportolás között? (Vajon függetlenek egymástól? Ha nem, akkor milyen függés van köztük?)

48. A tébécé korai felismerésére alkalmazott röntgenszűrésnél a tapasztalatok szerint hibák is előfordulnak. A kezdeti állapotban a betegek körülbelül 10%-át nem veszi észre a teszt, míg körülbelül 20%-ban egyébként egészséges embernél is pozitív eredmény (azaz valami gyanús folt a tüdőn) adódik. Tudjuk, hogy hazánkban a tébécé előfordulása 0,3%. a) Egy pozitív teszteredmény után mi az esélye, hogy tényleg tébécés az illető? b) Ha negatív az eredmény, akkor mi az esélye, hogy tébécés? c) Mindezek fényében vajon mire való ez a teszt?

49. Egy iskola 11. évfolyamán öt különböző nyelvet tanulnak, amihez egyéni választás szerint még a latin tartozhat. A következő táblázatban láthatjuk, hányan tanulják az egyes nyelveket. Minden tanuló csak egy úgynevezett alapnyelvet (lásd a táblázat oszlopfőit) tanul, amihez a latint választhatja.

Nyelvek/ Latint	Angol	Francia	Német	Olasz	Spanyol
is tanul	12	13	5	6	5
nem tanul	12	2	6	0	3

Számolja ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen választott tanuló a) angolul tanul, b) aki angolul tanul, a latint is választotta, c) nem választotta a latint, d) akiről tudjuk, hogy latint tanul, az angolul is tanul!

50. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott diák szereti a kólát, 0,8, míg annak, hogy a jeges teát szereti 0,6. Mindkét italt 0,5 eséllyel kedveli egy diák.

- Ha egy diák szereti a kólát, akkor mi az esélye annak, hogy szereti a jeges teát is?
- Mi az esélye annak, hogy egy diák pontosan az egyik italt szeresse

51. Kihúzunk a 10 golyó közül egymás után három golyót úgy, hogy a kihúzott golyót a következő húzás előtt mindig visszatesszük. Legyen az A esemény az, hogy a kihúzott három golyó közül pontosan kettő piros, a B esemény pedig az, hogy a kihúzott golyók között van piros. Határozza meg a $P(A|B)$ valószínűséget!

52. A sorsjegyek 40%-a kék, 60%-a zöld. A különböző színű sorsjegyekhez tartozó nyeremények arányát mutatja a táblázat (például az összes kék sorsjegynek a 35%-a tárgynyereményt nyer).

	kék	zöld
tárgynyereményt nyer	35%	40%
1000 Ft-os könyvtulványt nyer	20%	30%
5000 Ft-os könyvtulványt nyer	5%	—
nem nyer	40%	30%

Véletlenszerűen kiválasztunk egy sorsjegyet. Legyen az A esemény az, hogy ez a sorsjegy tárgynyereményt nyer, a B esemény pedig az, hogy ez a sorsjegy kék.

b) Igazolja, hogy $P(A) = 0,38$. Számítsa ki a $P(B|A)$ feltételes valószínűséget! Függetlenek-e az A és B események? b) Határozza meg az egy kék sorsjegyre eső nyeremény várható értékét, ha a tárgynyereményt 500 Ft-os értéken vesszük figyelembe!

53. Az üvegyárból egy üzletbe nagy mennyiségben szállítottak kék és sárga színű poharakat. Rakodás közben a kék poharak 7%-a, a sárga poharak 3%-a megrepedt. Az összes pohár 5%-a használhatatlan lett.

a) A megrepedt poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy kék színű?

b) A poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk 12 darabot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztottak között 3 darab repedt van?

Vegyes feladatok

54. Egy üzletbe három termelőtől 1200 kg krumplit szállítottak. A szállított mennyiség hatodrésze az első, negyedrésze a második, míg a többi a harmadik termelőtől származik. Az első termelő krumplijának az ötöde, a másodikének a harmada, a harmadikének a fele első osztályú. A raktárban a három helyről származó árut összekeverik. a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott krumpli első osztályú? b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott első osztályú krumpli a második termelőtől származik?

55. Határozza meg, mik a lehetséges kimenetek a következő kísérletekben, és melyik milyen valószínűségű. a) Egy játékautomatánál a nyerés valószínűsége 0,2. Öt egymás utáni játékban vizsgáljuk a nyerések számát. b) Három pénzérmét feldobva vizsgáljuk a fejek számát.

56. Egy csomag (32 lapos) magyar kártyából kihúztunk egy lapot. Az A jelentse azt az eseményt, hogy zöldet húztunk, a B azt az eseményt, hogy királyt. Határozzuk meg az A, a B az $A+B$ és az AB esemény valószínűségét!

57. Egy urnában négy golyó van, melyek 1-től 4-ig meg vannak számozva. Visszatevés nélkül kihúzzunk két golyót. Jelölje a kihúzott golyókra írt számok összegét x . a) Milyen értékeket vehet fel x , melyiket milyen valószínűséggel? b) Határozza meg az x valószínűségi változó várható értékét.

58. Két olyan dobókockával dobunk egyszerre, melyek mindegyikének egy oldalára a 0-s, két oldalára a 3-as és három oldalára a 6-os számjegy van írva. a) Milyen értékeket vehet fel a dobott számok összege, melyiket milyen valószínűséggel? b) Határozza meg a dobott számok összegének várható értékét.

59. Egy dobozban lévő 50 golyó közül 45 fekete és 5 piros. Találomra kihúzzunk a golyók közül 5-öt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közöttük pontosan egy piros van?

60. Mielőtt felvételi vizsgára mentem, a tanárom azt mondta, hogy kb. 60% esélyem van hogy 15 pontos felvételit írok. A vizsgára készüléskor 7 felvételi feladatsort oldottunk meg. Felteve, hogy a tanáromnak igaza volt, mennyi a valószínűsége annak, hogy 15 pontot írtam a) mind a 7 feladatsoron; b) a 7-ből pontosan 6 feladatsoron; c) a 7-ből pontosan 5 feladatsoron?

61. Egy üzemben 500 elkészült munkadarab közül 10 selejtes. A minőség-ellenőrzés során találomra kivesszük az 500 közül 20-at. Mekkora valószínűséggel van ezek között a) 0; b) 3; c) 5 selejtes?

62. Egy tálban körülbelül 120 szem cseresznye van, közöttük 5% kukacos. Andrea egy marék cseresznyét (10 szem) kivesz a tálból. a) Mekkora a valószínűsége, hogy nincs közöttük kukacos? b) Mekkora a valószínűsége, hogy Andrea az összes kukacos cseresznyét kivette a tálból? c) Ha Andrea cseresznyéi között nem volt kukacos, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az öccse által kimarkolt 10 szem között sem lesz?

63. A Budapest-Kecskemét távolsági buszjárat menetideje 85 perc, ebből 15 percet Budapest, 5 percet Kecskemét belterületén megy a busz. Mennyi a valószínűsége egy véletlenszerű baleset esetén, hogy az a) Budapesten következik be, b) Kecskeméthez (időben) közelebb következik be?

64. Két jó barát mindig délután 3 és 5 között megy a könyvtárba, ahol fél órát töltenek. Az érkezésük külön-külön egyenletesen véletlenszerű 3 óra és 5 óra között. Mekkora eséllyel találkoznak, azaz mekkora a valószínűsége, hogy lesz olyan pillanat, amikor együtt vannak a könyvtárban?

65. Egy ismeretlen városban metróra várakozunk a peronon mozdulatlanul. Befut a szerelvény. Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem kell se jobbra, se balra elmozdulnunk, hanem egyenesen beszállhatunk a szerelvénybe? A metróajtók szélessége 1,3 méter, két szomszédos ajtó között 3,5 méter a távolság, mi pedig 0,5 méter szélesek vagyunk.

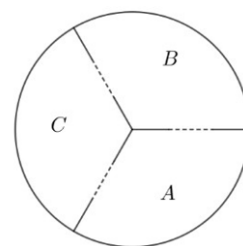
66. Egy gyár a beszállítójától 600 darab terméket rendelt. A gyár csak akkor veszi át a 600 darabot, ha egy visszatevés nélküli mintavétellel adódó 15 elemű mintában egyetlen hibás termék sincs. Ha a 600 termék között 6 hibás van, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintavétel után a gyár átveszi a termékeket?

67.

Egy számítógépes játékban egy kör alakú tartomány az ábra szerint három résztartományra van felosztva (A , B , C). Bármely két tartomány között egy átjáró van (az ábrán szaggatott vonallal jelölve).

A tartományok közötti átjárók mindegyike a többitől függetlenül p valószínűséggel van nyitva ($0 \leq p \leq 1$). Egyik tartományból a másikba csak nyitott átjárón (vagy átjárókon) keresztül lehet eljutni.

Legyen az E_0 esemény az, hogy az A tartományból nem lehet másik tartományba eljutni.



a) Mutassa meg, hogy az E_0 esemény valószínűsége $1 - 2p + p^2$.

b) Hogyan kell megválasztani a p értékét úgy, hogy az E_0 esemény valószínűsége legfeljebb 0,01 legyen?

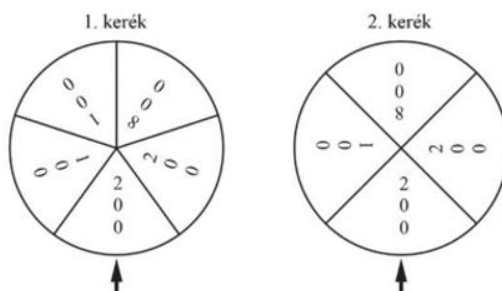
Legyen az E_1 esemény az, hogy az A tartományból pontosan egy másik tartományba lehet eljutni, az E_2 esemény pedig az, hogy az A tartományból mindkét másik tartományba el lehet jutni (nem feltétlenül közvetlenül).

c) Igazolja, hogy az E_1 esemény valószínűsége $2p - 4p^2 + 2p^3$, az E_2 esemény valószínűsége pedig $3p^2 - 2p^3$.

d) Határozza meg a p valószínűség értékét úgy, hogy az E_1 esemény valószínűsége a lehető legnagyobb legyen, majd számítsa ki ekkor az E_1 esemény valószínűségét!

68. Egy cég reklámja szerint a termékeik legfeljebb 0,5%-a lehet hibás. A minőséget visszatevéssel előállított 15 elemű minta alapján ellenőrizték, amelyben 2-szer fordult elő hibás termék. Tegyük fel, hogy a cég termékeinek pontosan 0,5%-a hibás! Igazolja, hogy ekkor 1%-nál kisebb annak a valószínűsége, hogy a cég termékei közül visszatevéssel előállított 15 elemű mintában legalább 2-szer fordul elő hibás termék!

69. Egy nyári fesztiválon a résztvevők a „Szerencsekerekek” nevű játékkal tehetik próbára a szerencséjüket. Egy játék során a játékosnak két kereket kell külön-külön megforgatnia. A kerekek a forgatás után véletlenszerűen állnak meg valamelyik számnál. (Az azonos keréken lévő körcikkek középponti szöge egyenlő, a kilenc körcikk mindegyikén van egy-egy szám, a 100, a 200 vagy a 800.) A forgatás előtt egy játékért 200 forintot kell fizetni. Ha a forgatás után a két kerék ugyanannál a számnál áll meg, akkor annyi forintot kap nyereményként a játékos, amennyi a két szám összege. (Ha például az ábrán látható módon mindkét kerék a 200-as feliratnál áll meg, akkor $200 + 200 = 400$ forintot kap a játékos.) Ha a két kerék két különböző számnál áll meg, akkor a játékos nem kap pénzt.



a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 10 játék során az 1. kerék pontosan négyszer áll meg 100-as számnál?

Egy játékot játszva a két keréssel, a nyereménynek és a játék árának különbsége a játékos nyeresége.

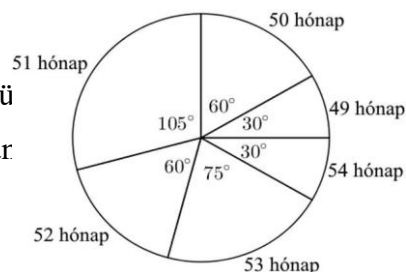
b) Egy játékot játszva mennyi a nyereség várható értéke?

Ha a két keréken forgatott számok összege 1000, ezt „bingónak” nevezik. Ha bingót ér el egy játékos, akkor választhat egy zeneszámot a fesztiválsátorban.

c) Igazolja, hogy a bingó forgatásának valószínűsége 0,2.

d) Hányszor kell játszani ahhoz, hogy legalább 95% legyen annak a valószínűsége, hogy egy játékos legalább egyszer bingót forgasson?

70. Egy napelemes akkumulátortöltőket gyártó cég termékei közül vizsgálták. A vizsgálat végeredményét (a 24 darabra vonatkozóan) szemlélteti.



A részletesebb vizsgálatok szerint a cég által gyártott töltők 90 százaléka legalább 50 hónap élettartamú (ezt tekinthetjük úgy, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott töltő 0,9 valószínűséggel legalább 50 hónap élettartamú).

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy szakboltba kiszállított 20 darab töltő között legfeljebb kettő olyan található, amelynek az élettartama 50 hónapnál kevesebb?

Ismert az is, hogy 0,75 annak a valószínűsége, hogy öt darab véletlenszerűen kiválasztott töltő mindegyikének élettartama 55 hónapnál kevesebb.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy darab véletlenszerűen kiválasztott töltő élettartama legalább 55 hónap?

71. Egy gyakorlott gépirónő a tapasztalatok szerint ötszáz karakterből átlagosan egynél hibázik (ezt tekinthetjük úgy, hogy minden egyes karaktert $1/500$ valószínűséggel ír le hibásan). Egy gépelt oldal kb. 2000 karaktert tartalmaz. b) Igazolja, hogy a gépirónő körülbelül 0,0182 valószínűséggel gépel le hibátlanul egy teljes oldalt! c) Ha a gépirónőnek egy 150 oldalas szöveget kell legépelnie, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a legépelt szövegnek lesz legalább két hibátlan oldala?

72. Egy kaszinóban magyar kártyával játszanak egy szerencsejátékot. A játékos a 32 lapos kártyából véletlenszerűen kiválaszt egyet, annak színét (tök, zöld, makk vagy piros) feljegyzik, majd a kiválasztott kártyát visszateszik a pakliba, megkeverik, s a játékos újra kiválaszt egy lapot. Ennek a színét is feljegyzik, visszateszik, ismét megkeverik, ezután a játékos újra húz egy lapot, és így tovább, mindezt összesen 5-ször. Ha az öt feljegyzett szín között legalább kétszer szerepel a piros, akkor a játékos nyert, ellenkező esetben veszített. Mekkora a nyerés valószínűsége?

73. A BKV megfigyelései alapján az utasoknak kb. 8%-a bliccel, azaz érvényes jegy vagy bérlet nélkül utazik a járatokon. Egy buszon 24 utas tartózkodott. Mekkora annak a valószínűsége, hogy két bliccelőt talál az ellenőr?

74. Egy pénzügyi befektető cég három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre 0,19, 0,25, illetve 0,28 valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy 0,05, hogy az első és a harmadik is csődbe megy 0,1, míg hogy a második és a harmadik is becsődül annak is 0,1. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődül 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy (a) az első vagy a második cég csődbe megy? (b) egyik cég sem megy csődbe?

75. Egy dobozban 3 golyó van: piros, fehér és zöld. 5-ször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy fehéret és zöldet is húzunk legalább kétszer, mennyi annak a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk pirosat?

76. Egy 4 egység oldalú négyzet középpontja A, egyik oldalának felezőpontja B. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy az AB egyenesére nem illeszkedő C pontját. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az ABC háromszög a) tompaszögű;

77. Az $x^2 + bx + 4 = 0$ egyenletben a b paraméter értékét véletlenszerűen választjuk a $[-6; 6]$ intervallumból. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy valós gyöke lesz az egyenletnek?

78. Pál és Judit találkozót beszélnek meg este 7 és fél nyolc között. Mivel tömegközlekedési eszközzel utaznak, bizonytalan az érkezésük. Judit 5 percet hajlandó várni Pálra, míg Pál 10 percet Juditra. Mekkora valószínűséggel sikerül találkozniuk?

79. Egy évfolyamdolgozat egyik feladatában öt feleletválasztós kérdésben kellett négy-négy válaszlehetőség közül az egyetlen helyeset kiválasztani. Amikor Domonkos elolvasta a kérdéseket, akkor látta, hogy az első két kérdésre biztosan tudja a helyes választ (ezeket be is jelöli majd), a harmadik és negyedik kérdésnél egy-egy válaszlehetőségről, az ötödik kérdésnél pedig két válaszlehetőségről tudta biztosan, hogy azok rosszak. Ezért úgy döntött, hogy az utolsó három kérdésnél tippelni fog: véletlenszerűen választ azon válaszlehetőségek közül, amelyekről nem tudja biztosan, hogy rosszak.

Határozza meg Domonkos helyes válaszai számának várható értékét.

80. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

81. Péter és Pál a következő játékot játsszák. Péter egy pénzérmével legfeljebb 3 dobhat. A játék akkor ér véget, ha valamelyik dobásnál Péter fejet dob. Ha az 1., 2., 3. Dobásnál sikerült fejet dobnia, akkor a nyereményei rendre 16000, 8000, 4000 Ft. Ha a harmadikra sem sikerül fejet dobnia, akkor Pál 76800 forintot kap Pétertől. Kinek kedveznek a játék feltételei?

82. Egy hatfős baráti társaság, Attila, Boróka, Csaba, Dóra, Emil és Fanni három csapatot alkot. Mindhárom csapat 2 tagú, és mind a hatan pontosan egy csapatnak lesznek a tagjai.

a) Igazolja, hogy 15 különböző lehetőség van a három csapat kialakítására! (Két lehetőség különböző, ha van olyan tag, akinek az egyik esetben más a csapattársa, mint a másikban.)

b) Ha véletlenszerűen (például sorsolással) hozzák létre a három csapatot, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom csapatba egy fiú és egy lány kerül?

Végül Attila Borókéval, Csaba Dórával, Emil pedig Fannival került egy csapatba. A három csapat tagjai egyéni asztalitenisz mérkőzéseket játszanak. Mindhárom csapat mindkét tagja egyszer játszik a másik két csapat mindkét tagjával. (Az egy csapatba tartozók nem játszanak egymás ellen.) Az egyes mérkőzéseket egymás után bonyolítják le. Az egyik mérkőzés után Attila megfigyelte, hogy a többi öt játékos mind különböző számú mérkőzést játszott eddig.

c) Hány mérkőzést játszott eddig Boróka?

83. Egy 10 cm sugarú céltáblát koncentrikus körökkel öt részre akarunk osztani úgy, hogy az egyes részek eltalálásának valószínűsége ugyanakkora legyen. (A találat helye véletlenszerű.) Hogyan válasszuk meg a körök sugarait?

84. A $[0; 11]$ intervallumon egymástól függetlenül kijelölünk két pontot. Ezek az intervallumot három részre osztják. Mennyi a valószínűsége, hogy az így keletkező három szakaszból háromszög szerkeszthető?

VII. Statisztika

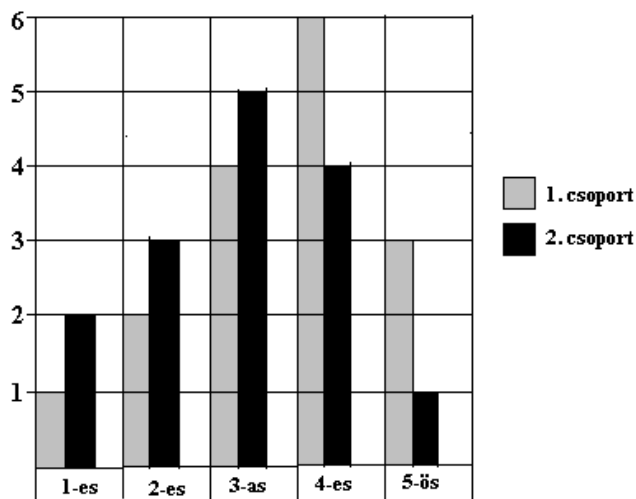
I.

1. Egy osztály tanulói két csoportban tanulják a matematikát. A két csoport diákjainak félévi osztályzatait szemlélteti az oszlopdiagram.

a) Számítsa ki az osztályátlagot, a jegyek mediánját, móduszát és szórását!

b) Év végére az 1. csoportban 2 diák egy-egy jegyet, egy diák két jegyet javított, a többiek jegye változatlan maradt. A 2. csoportban ugyancsak 2 diák javított egy-egy jegyet, 1 di-

ák rontott egy jegyet, a többiek jegye változatlan maradt. Melyik csoport ért el jobb átlagot az év végén?



2. Egy 80 lakásos társasházban a lakások alapterülete a következő eloszlású:

Alapterület (m ²)	35	50	62	66	70	73
Darabszám	10	22	14	11	8	15

- a) Számolja ki a különböző alapterületű lakások relatív gyakoriságát! b) Ábrázolja kördiagramon az eloszlást! c) Mennyi az összes lakás alapterületeinek számtani közepe? d) Mennyi a móduszuk? e) Mennyi a mediánjuk? f) Melyik közép milyen kérdés megválaszolásához lenne megfelelő információ?

3. Egy cégnél a dolgozók idegennyelv-ismerete szerint a következő létszámokat adták meg:

Idegennyelv ismeret	2014-ben (fő)	2024-ben (fő)
Nyelvvizsgálója van	8	32
Jól tud használni egy idegen nyelvet, de nincs nyelvvizsgálója	12	18
Nincs idegennyelv-ismerete	86	16

- a) Az egyes csoportoknak milyen a százalékos megoszlása? b) Ábrázolja oszlopdiagramon közös koordináta-rendszerben a két év százalékos megoszlását! c) Milyen tendenciák figyelhetők meg tíz év elteltével?

4. Egy kórházban megkérdezték a szív- és érrendszeri problémákkal bekerült betegeket háziállattartási szokásaikról. Kiderült, hogy 70 %-uknak van kutyája. Levonható-e az a következtetés, hogy a kutyatartás növeli a szív- és érrendszeri megbetegedések kockázatát? Válaszát konkrét számpéldákkal támassza alá!

5. A következő táblázatot egy biztosító társaság készítette. Azt próbáltál felmérni, hogy a baleseti bejelentések hogyan oszlanak meg a balesetet előidéző vezetők kora szerint. Ebből azt a következtetést vonták le, hogy a fiatalok a legbiztonságosabb vezetők.

Kor	17-20 év	21-60 év	61 év felett
Gyakoriság	325	4788	1076

Mi a véleménye erről? Mit kellene még tudni bármilyen következtetés levonásához?

6. 100 és 200 között a következő prímszámok találhatók: 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. a) Hány szám kerül az egyes csoportokba, ha tízes oszlopszélességeket választunk? b) Mennyi a csoportokba sorolt értékek átlaga, módusza, mediánja, szórása?

II.

7. Egy gimnázium 12. évfolyamának három osztályában a tanév során írtak egy próbaérettségi dolgozatot matematikából emelt- és közép szinten egyaránt. Ennek eredményét mutatják az alábbi táblázatok.

	A osztály					B osztály					C osztály				
osztályzat	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
emelt szint	1	2	3	4	3	0	1	2	5	2	0	0	3	8	6
közép szint	0	2	2	4	5	0	6	6	4	4	0	2	3	6	4

- a) Számítsa ki az osztályátlagok átlagát, valamint az évfolyamátlagot. Mi az oka e két átlag eltérésének? b) Határozza meg az évfolyamon külön-külön az egyes szinteken született osztályzatok

mediánját és móduszát! c) Az A osztályból 2, a B-ből pedig egy tanuló hiányzott a dolgozatíráskor. Ők (mindhárman közép szinten) később írták meg; az A osztály két tanulója ugyanazt az eredményt, a B osztály tanulója pedig náluk eggyel jobb osztályzatot szerzett. Legfeljebb mennyivel változhatott így a középszintű évfolyamátlag?

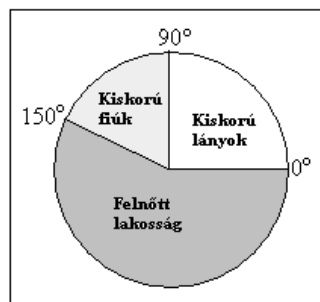
8. Egy gimnázium három végzős osztályának továbbtanulási statisztikáját szemlélteti az alábbi táblázat. a) A végzős diákok hány %-a folytathatja tanulmányait felsőoktatási intézményben? b) Szemléltesse oszlopdiagramon osztályonként a felvételizők és felvettek megoszlását! c) A felvételiző lányok 50%-a közgazdasági vonalon szeretett volna tovább tanulni, ezek 60%-át vették fel. A felvételiző fiúk 75%-a akart közgazdasági vonalon tovább tanulni, és ezek 75%-át vették fel. Az adott

évben végzett diákok hány %-a kezdi meg tanulmányait közgazdasági vonalon?

		A oszt. létsz.: 36 fő	B oszt. létsz.: 32 fő	C oszt. létsz.: 30 fő
Felvételizők	fiúk	12	12	8
	lányok	18	16	16
Felvettek	fiúk	7	10	6
	lányok	16	12	14

9. a) Egy iskola három érettségiző osztályába rendre 29; 33 és 22 tanuló van. Az egyes osztályok matematika érettségi dolgozatainak az átlaga rendre 3,6; 3,82 és 3,3. a) Mennyi az iskola matematika érettségi átlaga? b) Az évfolyam angol fakultációs csoportja korábban írt egy tesztet angolból. E diákok tesztjei között szerepelt egy 62 pontos is. A csoport átlaga 56 pont lett. Ha azonban a 62 pontos dolgozatot kihagyjuk a csoportból, akkor az átlag 55 pontra csökkenne. Hány diák van ebben a csoportban? c) Az angol fakultációs csoport előbbi tesztjei között a legkevesebb pontot érő dolgozat (melyből csak egy volt) 34 pontot ért. Legfeljebb hány pontos lehetett a legjobban sikerült dolgozat?

10. Egy 2400 lakosú község lakóinak nemek szerinti megoszlását mutatja az alábbi kördiagram. A felnőtt lakosok 54%-a nő. a) Hány férfi nemű lakosa van a községnek? b) Egy év múlva 128 lány és 98 fiú betöltötte 18. életévét. Született 46 fiú és 56 lány. Ugyanakkor az előző évi felnőtt lakosság 7%-a elhalálozott, közöttük 34 volt a nő. Ábrázolja oszlopdiagramon a város lakosságának nemek és korosztály szerinti megoszlását ebben az évben.



11. Egy iskola egy-egy 9. és 10. osztálya almaszedésen vett részt egy almatermesztő gazdaságban. Háromféle almát szedtek a diákok. A táblázat a tanulók által szedett almák mennyiségét tartalmazza ládákban mérve (tehát pl. a 9. osztály 13 fiúja jonatánból 12 ládával, míg idaredből 17 ládával szedett). a) Átlagosan hány ládát szedett egy fiú, ill. egy lány? b) Az összes leszedett almának hány %-át szedték a fiúk? c) Ábrázolja oszlopdiagramon az egyes almafajtákból szedett mennyiségeket! d) A jonatánért 1440 Ft-ot, a goldenért 1880 Ft-ot, az idaredért pedig 1620 Ft-ot fizetett a gazdaság ládánként. A diákok teljes keresetük 15%-át az iskolai

diákönkormányzatnak ajánlották fel. Mennyi a diákok egy főre jutó átlagjövedeleme?

		jonatán	golden	idared
9. évf.	fiúk (13)	12	14	17
	lányok (14)	11	13	14
10. évf.	fiúk (12)	13	15	16
	lányok (17)	16	16	20

12. a) Adja meg grafikus formában az alábbi táblázat alapján az öt év inflációs adatait! b) Mekkora infláció volt az öt év alatt? c) Mennyi az évenkénti átlagos infláció?

Év	A fogyasztói ár változása %-ban az előző évihez képest (az előző évi a 100%)
2020	114,3
2021	110,0
2022	109,8
2023	109,2
2024	105,3

13. Magyarországon a főbb vállalkozási formák százalékos megoszlása 2015-ben és 2021-ben a táblázat szerint alakult. a) Ábrázolja az adatokat oszlopdiagramon közös koordináta-rendszerben! b) Ha tudjuk, hogy 2021-ben 36 %-kal több vállalkozás volt, mint 2015-ben, akkor hány százalékkal nőtt vagy csökkent az egyes vállalkozási formák száma a hat év alatt?

Vállalkozási forma	2015-ben (%)	2021-ben (%)
Kft.	14	18
Bt.	13	21
Egyéni vállalkozók	69	56
Egyéb	4	5

14. Egy kórház szülészeten a tavalyi évben 111 baba született. A születési tömegüket osztályokba sorolták, amelyet a következő táblázat ad meg.

a) Ábrázolja oszlopdiagrammal az eloszlást!
b) Határozzon meg legalább két valamilyen értelemben átlagos jellemzőnek mondható születési tömeget! c) Tegyen fel olyan kérdést, amelyre a b)-ben megadott valamelyik középérték segítségével lehet válaszolni! d) Mekkora a szórás? e) Mennyire valószínű az adatok alapján, hogy egy baba legalább 3 kg-mal születik? f) Mit gondol, milyen arányú lehet a koraszületés százalékban kifejezve, ha az időben született gyerekek tömege ritkán van 2 kg alatt?

Születési tömeg (g)	A babák száma
1000-1500	2
1501-2000	4
2001-2500	10
2501-3000	25
3001-3500	30
3501-4000	26
4001-4500	10
4501-5000	4

15. Negyven egyetemi hallgató testsúlyát az alábbi táblázat mutatja:

Tömeg (kg)	53-56	57-60	61-64	65-68	69-72	73-76	77-80
Gyakoriság	2	3	4	11	9	6	5

a) Készítsen hisztogramot az adatokhoz! b) Számítsuk ki a negyven diák átlagos testsúlyát!
c) Mekkora a becsült szórás? Mekkora a relatív szórás (azaz a szórás és az átlag hányadosa)?

16. Egy műveltségi teszten elérhető maximális pontszám 10. A tesztet 26-an írták meg a következő eredménnyel.

Pontszám	3	4	5	6	7	8	9	10
Gyakoriság	6	3	1	2	0	5	5	4

a) Számolja ki a számtani közepet, a mediánt és a móduszt. b) A tanár gratulált az osztálynak, hogy több mint a háromnegyed az átlag fölött volt. Melyik átlagra gondolt? c) Mekkora az eredmények szórása és relatív szórása? d) Az előző kérdésekre adott válaszok alapján röviden értékelje az osztály teljesítményét.

17. Két osztályban megírják ugyanazt a matematikafelmérőt. Az egyikben a maximális 100-ból 64 pont az átlagos teljesítmény, míg 59 pont a medián, a másikban 52 pont az átlag és 57 a medián. A szórás az első esetben 12, a másikban csak 10. Tudjuk még, hogy az első osztály 25 fős, a második pedig 32 fős. a) Meg lehet-e mondani a két osztály közös átlagát, illetve mediánját? b) Hasonlítsa össze a két osztály teljesítményét a fenti adatok alapján!

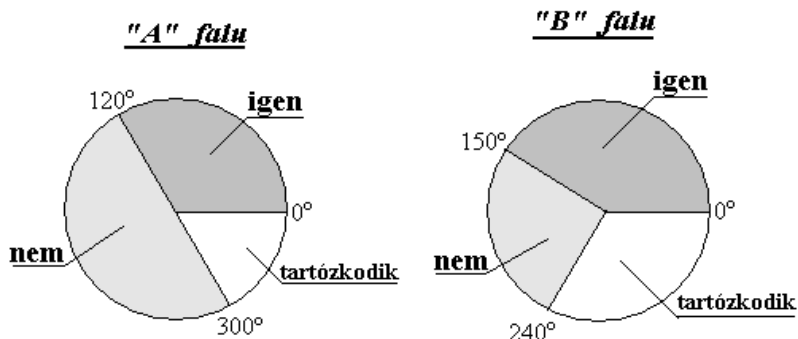
18. Három iskola diákjai írják meg ugyanazt a feladatsort. Az egyes iskolák diákjainak átlagos teljesítménye rendre 63%, 48%, illetve 72% volt. Az egyes iskolákból 23, 30 illetve 15 tanuló vett részt. a) Hány százalékos az összes tanuló teljesítménye?

III.

19. Két faluban (A-ban és B-ben) népszavazást tartottak arról, hogy a két falut összekötő úton megépítsék-e a személtlerakó telepet. Az A faluban 1266-an szavaztak, a B faluban 2616 volt a szavazók száma. E népszavazás eredményét szemlélteti az alábbi két kör-diagram.

a) Ábrázolja egy oszlopdiagramon a szavazás összesített végeredményét! b) Az A faluban a szavazásra

jogosultak kb. 82%-a, a B faluban a szavazásra jogosultak kb. 72%-a vett részt a szavazáson. A két falu összes szavazásra jogosultjainak kb. hány %-a tartózkodott?



20. A digitális mobilszolgáltatók piaci részesedése az aktív előfizetésekhez viszonyítva a következő: I. szolgáltató 40,14%, II. szolgáltató 6,82%, III. szolgáltató 52,94%. a) Szemléltesse a piaci részesedést oszlopdiagramon! b) Igaz-e, hogy Magyarországon a lakosság több mint a felének az III. szolgáltató a mobilszolgáltatója? c) Ha ebben az időben 2,2 millió mobil-előfizető volt, akkor százezerre kerekítve hány új előfizetőt kell szereznie az I. szolgáltatónak, hogy utolérje az III. szolgáltatót, feltéve, hogy az ez alatt nem terjeszkedik? d) Az adatok alapján mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen választott magyar lakosnak az III. szolgáltatónál van előfizetése?

21. A következő táblázat a magyar háztartások kiadásait tartalmazza főcsoportok szerint egy adott évben.

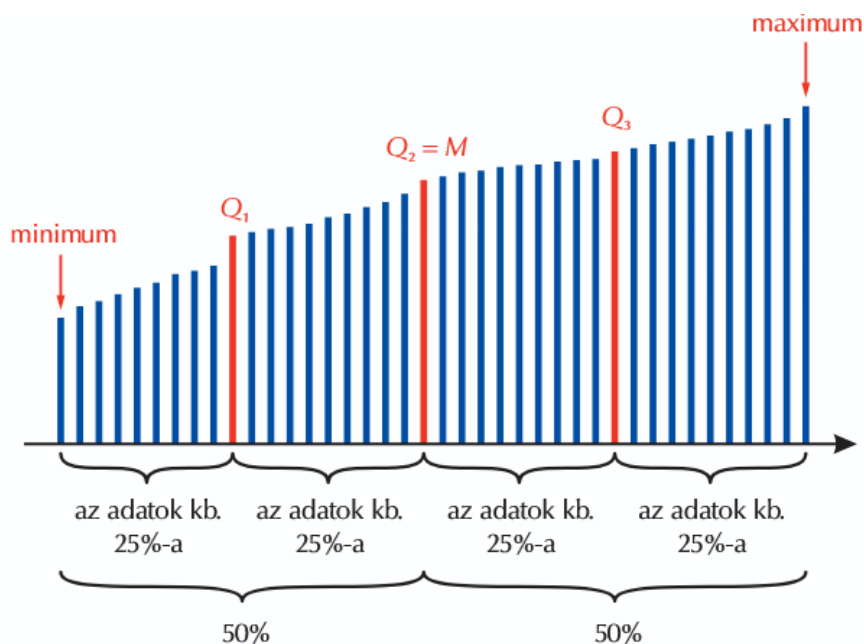
Kiadási főcsoport	%-ban	Kördiagramon mekkora középponti szög tartozna hozzá?
Élelmiszer	18	
Élvezeti cikkek	8	
Ruházkodási cikkek	6	
Fűtés	8	
Tartós fogyasztási cikkek	4	
Egyéb iparcikkek		54°
Szolgáltatás		

a) Töltse ki a táblázat hiányzó adatait! b) Ábrázolja kördiagramon a táblázat adatait! c) Tudjuk, hogy 2002-re az infláció, illetve az árak változásai miatt a fűtésre fordított költség aránya körülbelül megkétszereződött, és a szolgáltatások költsége is 10 %-kal több lett. Ha feltesszük, hogy a többi főcsoport egymáshoz viszonyított aránya nem változott, akkor az új információk szerint hogy néz ki a kiadási táblázat %-os oszlopa?

22. Egy adott évben, a statisztikai adatok szerint 20%-kal nőtt a közúti forgalomban részt vevő gépjárművek száma, közli az egyik napilap. A hírlapíró ebből arra következtet, hogy gazdagodnak a családok, hiszen 20%-kal több gépkocsi fut az utakon. a) Mutasson konkrét számpéldát, amely szerint a személygépkocsik száma 10%-kal csökkent, mégis a közúti forgalomban részt vevő gépjárművek száma 20%-kal nőtt!

Három nagy osztály soroltuk a közúti járműveket: személygépkocsik, autóbuszok és tehergépkocsik (beleértve a kamionokat és minden szállító járművet). Az előző évbéli forgalomból való részesedésük a következő: autóbusz 8%, teherautó 28%, személyautó 64%. b) Mennyivel változott a személygépkocsik száma egy év alatt, ha tudjuk, hogy a tehergépkocsik száma 38%-kal növekedett, míg az autóbuszoké csak 5%-kal?

Kvartilisek



Q_0 a az adatsokaság minimuma.

Q_1 az első és második negyedek elválasztó szám, tehát az adatoknak körülbelül a 25%-a kisebb és körülbelül a 75%-a nagyobb nála. Alsó kvartilisnek hívjuk, de szokás első kvartilisnek is nevezni.

Q_2 a második és a harmadik részt választja el, vagyis az adatoknak körülbelül az 50%-a kisebb és körülbelül 50%-a nagyobb nála. Megfelezi az adatokat. Ezt már ismerjük, itt középső kvartilis a neve, de valójában ez a medián.

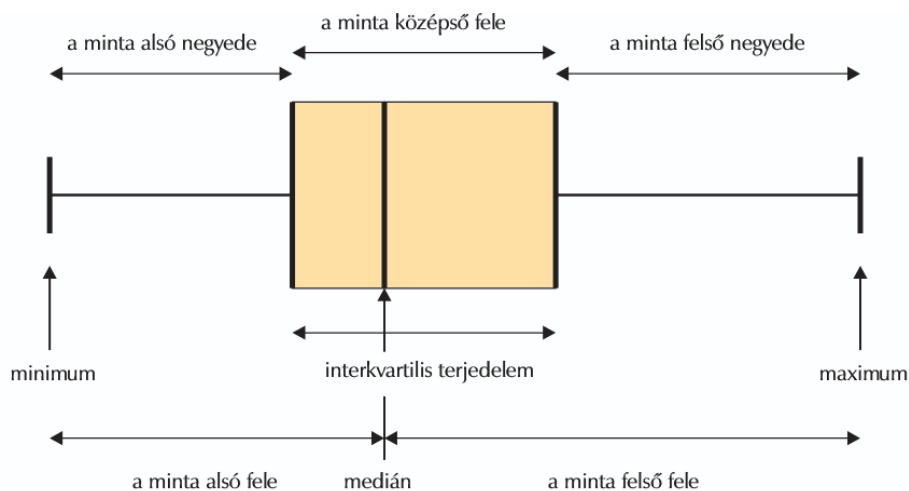
Q_3 a harmadik és a negyedik negyedek választja el, az adatoknak körülbelül a 75%-a kisebb és körülbelül 25%-a nagyobb nála. Felső kvartilisnek hívjuk, de szokás harmadik kvartilisnek is nevezni.

Q_4 az adathalmaz maximuma.

23. Határozzuk meg a következő adatsokaságok kvartiliseit!

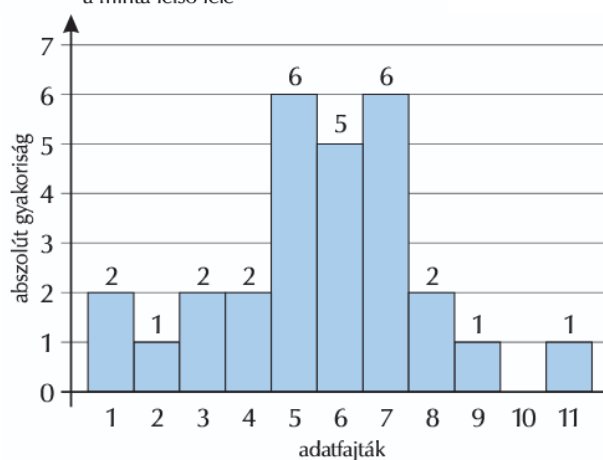
- 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25
- 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25, 22
- 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25, 22, 12
- 11, 23, 9, 15, 20, 21, 21, 17, 13, 11, 16, 25, 22, 12, 14

A dobozdiagram

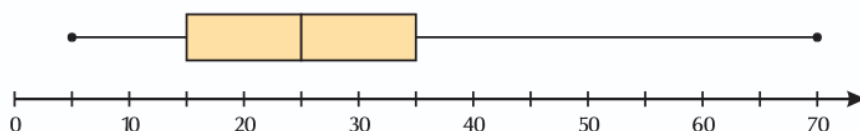


24. Határozzuk meg az oszlop diagrammal megadott adatok kvartiliseit. A vízszintes tengelyen az adat fajtákat, a függőlegesen pedig az abszolút gyakoriságokat ábrázoltuk.

25. Készítsük el a következő adat sokasághoz tartozó doboz diagramot:
9, 11, 11, 13, 15, 16, 17, 20, 21, 23, 25



26. Határozzuk meg a dobozdiagram alapján a sokaság kvartiliseit, terjedelmét, interkvartilis terjedelmét.



27. Az alábbi táblázat egy osztály diákjainak az egyhavi zsebpénzét mutatja, az első sor az adatfajtákat, a második sor pedig az abszolút gyakoriságukat.

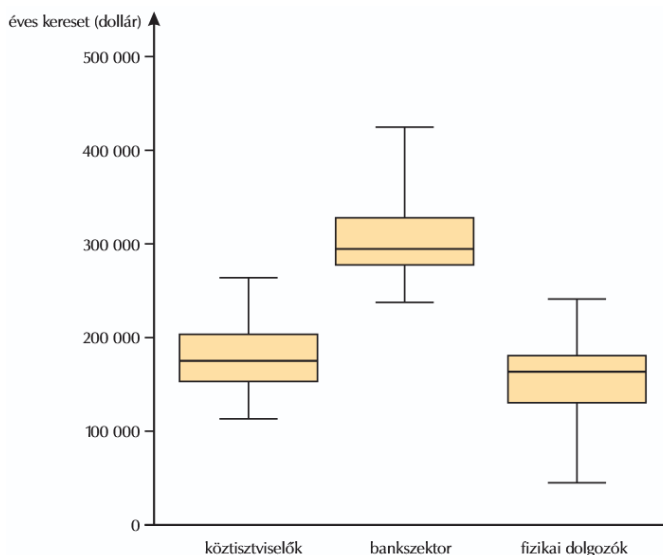
x_i (Ft)	1000	4000	10 000	12 000	13 000	15 000	22 000	25 000
k_i (db)	1	4	5	7	4	2	1	1

- a) Hányan járnak az osztályba?
b) Ábrázoljuk az adatok eloszlását oszlopdiagramon!

- c) Számítsuk ki az adathalmaz kvartiliseit!
d) Ábrázoljuk az adatokat dobozdiagram segítségével!

28. Az alábbi függőlegesen elhelyezett dobozdiagramok egy ország három szektorában dolgozók éves keresetét mutatják dollárban. Az első a köztisztviselők, a második a bankszektor, a harmadik a fizikai dolgozók éves bérét ábrázolja.

- a) Melyik szektorban a legmagasabb, és hol a legalacsonyabb az átlagjövedelem?
 b) Melyik szektorban tapasztalunk a medián értékénél jóval magasabb jövedelmeket?



c) Igaz vagy hamis?

I: A diagramok alapján megállapíthatjuk, hogy a fizikai dolgozóknál a maximális jövedelem nem éri el a bankszektorban elérhető minimális jövedelmet.

II: A közsféra mediánja kevesebb, mint a bankszektor minimuma.

29. Egy 30 fős osztály két matematikadolgozatának eredményei láthatók a táblázatban. Határozzuk meg a két dolgozatban az osztályzatok

- a) móduszát, mediánját és az átlagát;
 b) az alsó és a felső kvartilis értékeket!
 c) Számoljuk ki a két dolgozat jegyeinek egyesítésével kapott osztályátlagot!
 d) Számoljuk ki az előző osztályátlagot abban az esetben is, ha a II. dolgozat témazáró volt, ezért jegyei kétszeres súllyal számítanak!
 e) Melyik dolgozat sikerült jobban? Érvelj az egyik dolgozat mellett!

Osztályzat	I. (db)	II. (db)
5	6	7
4	7	8
3	8	3
2	6	8
1	3	4

30. Egy rendezvényre 140 ember jött el. A táblázat a résztvevők életkorát mutatja be nagyság szerint rendezve. Igaz-e, hogy az alsó és felső kvartilisek mediánja megegyezik az eredeti számsokaság mediánjával?

31. Határozzuk meg az osztályzatok átlagát, az átlagtól számított átlagos abszolút eltérését és a szórását!

Osztályzat	(db)
5	7
4	6
3	10
2	6
1	1

15	15	16	16	16	17	17	17	17	18
18	18	18	18	19	19	19	19	19	19
20	20	20	20	20	20	21	21	21	21
21	22	22	22	22	23	23	23	24	24
25	25	25	26	26	26	27	27	28	30
32	33	35	37	38	38	39	39	39	39
40	40	40	40	41	41	41	41	41	42
42	42	42	42	42	42	42	42	42	43
43	43	43	43	44	44	44	44	44	44
45	45	45	45	45	46	46	46	46	46
46	47	47	47	48	48	48	48	49	49
49	49	50	50	50	52	52	52	52	53
53	54	54	54	56	56	57	58	58	59
60	60	61	64	65	67	67	68	68	69

32. Egyenlő-e a minta terjedelmének fele a félterjedelemmel?

33. Ha a minta terjedelme nulla, akkor a félterjedelem is az. Megfordítható-e az állítás?

34. Tekintsük az $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ számtani sorozatot.

- Mennyi a sorozat első n tagjának a szórása?
- Számoljuk ki n értékét, ha az első n tag szórása éppen 2.

35. Bizonyítsuk be a szórásnégyzet felhasználásával, hogy n darab pozitív szám számtani közepe nem lehet nagyobb, mint a számok négyzetes közepe.

36.

Legyen adva az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsokaság, melynek nem minden eleme egyenlő. A számsokaság átlaga $\bar{x}$, szórása S_n .

Tekintsük az $\frac{x_1 - \bar{x}}{S_n}, \frac{x_2 - \bar{x}}{S_n}, \dots, \frac{x_n - \bar{x}}{S_n}$ sokaságot! (Ezt szokás az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsokaság sztenderdizáltjának nevezni.) Bizonyítsuk be, hogy a sztenderdizált sokaság átlaga 0, szórása 1.

37.

2. példa

Egy 35 fős osztály három jelölt (A, B, C) közül szavazással választja ki a diákönkormányzati képviselőjét. A szavazáskor a három név egy sorrendjét kell leadni úgy, hogy az első helyen szerepeljen a leginkább, az utolsón pedig a legkevésbé támogatott jelölt.

A szavazás eredménye látható a táblázatban.

sorrend	A, B, C	A, C, B	B, A, C	B, C, A	C, A, B	C, B, A
darabszám	6	7	5	6	4	7

A tanulók a szavazás előtt nem állapodtak meg az értékelés módjában, ezért utólag különböző javaslatok is születtek. Sajnos ezek nem feltétlenül adnak azonos végeredményt.

- Anna javaslata az egyszerű többség: Aki a legtöbbször szerepel az első helyen, az legyen a képviselő (tehát ő nyeri a szavazást).
- Béla javaslata: A legtöbbször utolsó helyezettet hagyjuk ki, és a két megmaradt személyt hasonlítsuk össze: melyikük előzte meg többször a másikat.
- Cili: Rögtön vizsgáljuk az összehasonlításokat: legyen az a nyertes, aki a szavazatok többségében megelőzte a két riválisát.
- Dénes számszerűsítene, a 3–2–1 pontozást javasolja. Nyerjen az, aki a legtöbb pontot kapta.
- Enikő szerint az első hely kicsit többet ér, ő a 4–2–1 pontozást javasolja.
- Ferenc szerint viszont inkább az utolsó helyet pontozzuk alacsonyabbra, végül is a többség az utolsó helyezett személy ellen szavazna. Legyen a pontozás 3–2–0.

Ki lenne a szavazás nyertese az egyes esetekben?

38. Az iskolákban szervezetek közvélemény-kutatást például a tekintetben, hogy a diákok hány százaléka elégedett a dök munkájával. A diákok 5%-át kérdezzétek meg! Próbáljatok módszert keresni arra, hogy hogyan lehetne minél reprezentatívabb mintát kiválasztani az iskola tanulói közül! A minta jól tükrözze vagy lehetőleg minél jobban megközelítse a teljes diákság véleményét.

VIII. Mátrixok és determinánsok

1. Számítsuk ki: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = ?$

2. $AB = ? \quad BA = ? \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

3. Számítsuk ki a szorzatokat: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = ? \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = ? \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = ?$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha A négyzetes mátrix, E az egységmátrix, akkor $EA=AE=A$

5. Keressünk két olyan 2x2-es nem zérusmátrixot, amelyek szorzata a zérusmátrix.

6. Végezzük el a mátrixszorzásokat: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = ?$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ? \quad (4 \ 5 \ 6) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = ? \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} (4 \ 5 \ 6) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = ? \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 1) = ?$$

7. Bizonyítsd be, hogy $(AB)C=A(BC)$, ha $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$

8. $A^2 = ? \quad A^3 = ? \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Lássuk be a következőket, ha $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

b) $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$

c) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

d) $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$

e) $(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2$

10. Lássuk be, hogy $AB = -BA$ és $(A+B)^2 = A^2 + B^2$, ha $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

11. Lássuk be, hogy $AB=BA$, ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

12. Bizonyítsuk be, hogy a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$,

$$\text{ha } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{ és } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

13. Oldjuk meg a mátrixokról és a determinánsokról tanultak felhasználásával az egyenletrendszereket.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 6 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ x + 4y = 140 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 3y = 40 \\ 8x + 4y = 30 \end{cases}$$

14. Keresd meg a mátrix hiányzó elemeit úgy, hogy a szorzás helyes legyen:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 9 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = E$$

15. Oldd meg az egyenletrendszert:
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

16. Számítsd ki a determinánsok értékét: a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ b) $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$$\text{c) } D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{d) } D = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

17. Oldd meg az egyenletrendszereket:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ y + 2z + 3t = 20 \\ z + 2t + 3x = 14 \\ t + 2x + 3y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

18. Bizonyítsuk be, hogy
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

19. Számítsuk ki a determinánsok értékét:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & -3 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -9 & 3 \\ 2 & -6 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

20. Keressük meg a következő „elrejtő” mátrixokhoz tartozó megfejtő mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

21. Határozzuk ki a következő mátrixok inverzét: a) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$e) \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad g) \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad h) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad i) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

22. Számítsd ki a 2x2-es mátrix inverzét: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

23. Szorozzuk össze ezt a két mátrixot: $\begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = ?$

24. Számítsuk ki a determinánsok értékét: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -5 & -5 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ -5 & -5 & -1 \end{vmatrix}$

25. Oldd meg a lineáris egyenletrendszert:
$$\begin{cases} 3x + 3y - 2z = -3 \\ 2x + 2y - 5z = 9 \\ 5x - y - 3z = 12 \end{cases}$$

26. Oldd meg a mátrixegyenletet: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

27. Legyen $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Az a paraméter mely értékére nem létezik az M mátrix inverze?

28. Legyen $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. a) Számítsd ki P^n általános alakját. (n pozitív egész szám)

b) Mutasd meg, hogy $P^n \cdot P^m = P^{n+m}$ c) Létezik-e P^{-1} ? Ha igen, mi az?

29. A mátrixszorzás nem kommutatív művelet.

A transzponált a mátrixot úgy kapjuk meg, hogy az eredeti mátrix sorait és oszlopait felcseréljük. Jele A^T .

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ezzel a példával igazold, hogy $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

IX. Komplex számok

1. Számítsuk ki: $(2 + 3i)(3 - 2i)$ $(3 - 2i)^2$ $(1 + i)^3$ $\frac{1+i}{1-i}$ $\frac{2i}{1+i}$ $|4 + 3i|$

$$|\cos \alpha + i \sin \alpha| \quad |-2 + 2\sqrt{3}i| \quad (2 + 4i)(6 - i) \quad (8 + 9i)(1 + i)$$

2. Írjuk át trigonometrikus alakba: $-1 - i\sqrt{3}$ $2\sqrt{3} - 2i$ $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ -2

3. Adjuk meg az eredményt trigonometrikus alakban:

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \quad \frac{2\sqrt{3} + 2i}{1 + i} \quad i^5$$

4. Számítsd ki: $(1 + i)^{10}$ $(1 - i\sqrt{3})^6$ $(-1 - i)^{16}$ $\sqrt[4]{1}$ $\sqrt[6]{-64}$ $(2 + 5i)^3$ $(i - 1)^8$

5. Oldjuk meg az egyenleteket: $2|z| - 3z = 1 - 12i$ $|z| + z = 2 + i$ $\bar{z} = z^2$ $z^2 = -1$

6. Mennyi a komplex számok argumentuma? $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$ $z = -1 - 3i$

7. Oldjuk meg az egyenleteket: $x^3 - 8 = 0$ $x^6 + 64 = 0$

8. A $z^n = 1$ egyenlet megoldásai: $\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Ezeket n -edik egységgyököknek hívjuk. Vizsgáljuk a következő kérdést először konkrét n -ekre, utána esetleg általánosan: Az n -edik egységgyökök közül melyek azok, amelyek pozitív egész kitevős hatványai végigfutnak az összes n -edik egységgyökön?

9. Végezzük el a gyökvonásokat: $\sqrt[3]{2 - 2i}$ $\sqrt[3]{8i}$ $\sqrt[3]{1}$

10. Oldjuk meg az egyenletet a komplex számok halmazán:

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad x^2 + 6x + 10 = 0 \quad x^2 - 3x + (3 - i) = 0$$

11. Hozzuk a + bi alakúra: $\frac{1-i^2+i^4-i^6-\dots-i^{18}}{1+i+i^2+i^3+\dots+i^9}$

12. Számítsuk ki algebrai alakban az eredményt:

$$(1 - i)^8 \quad (i - 1)^6 \quad (2 + \sqrt{12}i)^5 \quad \sqrt{i} \quad \sqrt{-3i}$$

13. Számítsuk ki algebrai alakban az eredményt: $\sqrt{15 - 8i}$ $\sqrt{8 - 6i}$ $\sqrt{-3 + 4i}$

14. Adjuk meg trigonometrikus alakban az eredményt: $\sqrt[5]{32 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)}$

15. Számítsuk ki a komplex számok körében: $\sqrt[4]{-4}$ $\sqrt[6]{-64}$ $\sqrt[3]{-8 + i}$ $\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{-8}$

16. Számítsuk ki az n -edik egységgyököket, ha $n = 1, 2, 3, 4$.

17. Írjuk fel algebrai alakban: $\sqrt{8} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$ $2e^{-\frac{10\pi}{3}i}$

18. Írjuk fel exponenciális alakban: $1 - i$ $2 + i\sqrt{12}$

19. Végezzük el a műveleteket: $a + bi$ $4i \cdot 3i$ $(-3i) \cdot (6i)$ $(a + b)i \cdot (a - b)i$

$$\frac{-14i}{2i} \quad \frac{7i}{-28i} \quad (5 + 5i) + (10 + 4i) + (6 + 5i) \quad (5 + 3i) - (2 - 2i)$$

$$(1 + i)(1 - i) \quad (1 + 5i)(2 - 5i) \quad \frac{5i}{2+3i} \quad \frac{3-5i}{4+7i}$$

20. Mutassuk meg, hogy az $x^2 - (3 - 2i)x + (5 + 5i) = 0$ komplex együtthatós másodfokú egyenlet gyökei a $2 + i$ és $1 - 3i$ komplex számok.

21. Írjuk fel a következő számok konjugáltját: 5 , $2i$, $-5i$, $1 + i$, $-2 - 3i$, $8 - 7i$

22. Számítsuk ki a következő komplex számok abszolút értékét:

$$3i, \quad -2i, \quad 2 - i, \quad 5 + 2i, \quad 6 - 3i$$

23. Igazoljuk, hogy két komplex szám összegének konjugáltja egyenlő a komplex számok konjugáltjainak összegével, a szorzatuk konjugáltja egyenlő a tényezők konjugált szorzatával.

24. Igazoljuk, hogy egy komplex szám i -szeresét úgy ábrázolhatjuk, hogy a komplex szám vektorát $+90$ fokkal elforgatjuk.

25. Írjuk fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját.

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad 2i, \quad 1 + i, \quad -1 - i, \quad 1 + i\sqrt{3}, \quad \sqrt{3} - i, \quad \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

26. Írjuk föl algebrai alakban a következő komplex számokat.

$$6(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) \quad 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \quad 3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$$

27. Számítsuk ki i nulla és pozitív egész kitevőjű hatványait.

$$28. \text{ Számítsuk ki: } i + i^2 + i^3 + i^4 \quad (1 - i)^4 \quad (1 + i)^4$$

$$29. \text{ Végezzük el a következő hatványozásokat: } (1 + i\sqrt{3})^3 \quad (1 + i)^8$$

30. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:

$$x^3 = 1 \quad x^4 = 1 \quad x^5 = 1 \quad x^6 = 1$$

PÚLIA

- I. Differenciálszámítás
- II. Térgeometria
- III. Integrálszámítás
- IV. Logika
- V. Gráfok
- VI. Valószínűesszámítás
- VII. Statisztika
- VIII. Mátrixok és determinánsok
- IX. Komplex számok