

I. Másodfokú világ

		42-45.	42-55.		
--	--	--------	--------	--	--

I.

1. Az $x^2 - x + p = 0$ egyenlet valós gyökei eggyel kisebbek, mint az $x^2 + px - 1 = 0$ egyenlet valós gyökei.

a) Számítsa ki a p valós paraméter értékét! b) Számítsa ki mindkét egyenlet valós gyökeit $p = 5$ esetén!

2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 10 - 22$ és az $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 6$ függvények. Oldja meg az $f(x)=g(x)$ egyenletet!

3. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonjának tengelypontja a $T(4; 2)$ pont, és a $P(2;0)$ pont is illeszkedik a grafikonra. Számítsa ki az a , b , c együtthatók értékét!

4. Egyszerűsítsük a következő törtet: $\frac{2a^2+7a+3}{6a^2+a-1}$ $\frac{a^2-9a+20}{2a^2-20a+48}$

5. Az m mely értékeire van a következő egyenletnek két különböző valós gyöke?
 $(m-1)x^2 - 2mx - m + 2 = 0$

6. Hol van maximuma és mennyi a maximumértéke?

a) $y = -x^2 + 10x$ b) $y = 2x^2 - 10x - 22$ c) $y = -x^2 - 8$

7. Legyen az x pozitív valós szám. Határozza meg x értékét úgy, hogy a 27 és az x számtani közepe 6-tal nagyobb legyen, mint a mértani közepük!

8. Legyen $f(x) = x^2 - 11x + 30$. Igazolja, hogy ha $f(x) \neq 0$, akkor $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x-4}{x-6}$

9. Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk egy adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a $d: [5; 20] \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x) = -0,25x^2 + 20x + 40$ függvény adja meg, ahol x a fa években mért életkorát, $d(x)$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves?

b) Hány dm^2 -rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének területe éppen 1 méter?

10. Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy a kijelentés igaz legyen! Az $x^2 - 2x + 4 = m$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van.

11. Határozza meg az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + bx + c$ függvény b és c paramétereinek értékét, ha tudjuk, hogy a függvénynek $x = 2$ -ben minimumhelye van, és a minimum értéke -1 .

II.

12. Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = (p-3,5)x^2 + 2(p-2)x + 6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!

a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x = -2$ zérushelye a függvénynek!

b) Milyen p értékek esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb?

13. A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2; 1)$, $B(7; -4)$, $C(11; p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60° -os.

14. Adja meg a $(p^2 - 1)x^2 + (1 - p)x + p - 1 = 0$ egyenlet megoldásainak számát a p paraméter függvényében!

15. Az m paraméter mely értékei esetén teljesül minden x -re, hogy
$$x^2 - (8m - 2)x + 15m^2 - 2m - 7 \geq 0$$

16. A repülőgépek üzemanyagfogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950000)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban. A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg?

17. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x-3} + \frac{2}{y} &= \frac{1}{(x-3)y} \\ y^2 - 4(y-x) &= 9 \end{aligned} \right\}$$

18. Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei 2-vel nagyobbak, mint az $x^2 + cx + b = 0$ egyenlet gyökei. Számítsuk ki b és c értékét.

19. Az egyenlet megoldása nélkül adjunk meg egy olyan egyenletet, amelynek gyökei az $5x^2 - x - 4 = 0$ egyenlet gyökeinek ellentettjei.

20. A p mely értékére teljesül, hogy az $x^2 - 3px + p^2 = 0$ egyenlet gyökei négyzeteinek összege 112?

21. A p mely értéke esetén lesz az $ax^2 + (p - 2)x + p - 3 = 0$ egyenlet gyökei négyzeteinek összege a legkisebb?

22. Hogyan kell a c értékét megválasztani, hogy a függvény értékkészlete a 17-nél nem kisebb számok halmaza legyen? $y = x^2 + 10x + 6c$

23. Igazolja, hogy nincs olyan szabályos n -szög, amelynek a belső szögei n fokosak!

24. Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$.
a) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

25. Az egységnyi oldalú, szabályos ABC háromszögbe olyan PQRS téglalapot írunk, melynek PQ oldala az AB oldalra illeszkedik, R a BC oldal pontja, S pedig a CA oldalé. Határozza meg a PQRS téglalap területének maximális értékét!

26. Adott az $x^2 - (4p + 1)x + 2p = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van!

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke?

c) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen!

27.

Egy háromszög oldalainak hossza $p^2 + q^2$, $p^2 - q^2$ illetve $2pq$, ahol p és q olyan pozitív egész számok, melyekre $p > q$ teljesül.

a) Igazolja, hogy a három oldalhossz közül $p^2 - q^2$ a legnagyobb!

b) Igazolja, hogy a háromszög derékszögű!

III.

28. A valós p mely értéke esetén lesz az $px^2 - px - 2p = x - 3$ egyenletnek két különböző pozitív gyöke?

29. a) $|x^2 - x - 3| < 9$ b) $|2x^2 - 9x + 15| \geq 20$

30. A valós p mely értéke esetén esnek az $px^2 + 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökei az $[1, 3]$ intervallumba?

31. Egy n elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű ($n \geq 4$). Határozza meg a halmaz elemszámát!

32. A szókereső mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosnak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \geq 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos.

a) Van-e olyan szó, amelyért 26 pontot kap a játékos? Válaszát indokolja!

b) Igazolja, hogy a játékszabály szerint a hosszabb szóért több pont jár, és hogy csak egész pontszámot kaphat a játékos!

c) Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot! (A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú „szó” létezik.)

II. Egyenletek, egyenletrendszerek

6., 48., 51-52.		34-41.	49-52.		
-----------------	--	--------	--------	--	--

I.

1. Oldja meg a valós számok halmazán! $\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = \sin \frac{\pi}{2} - \lg 1 + 2^{\log_2 9}$

2. Oldja meg a valós számok halmazán! a) $(x - 2) \cdot \lg(x^2 - 8) = 0$ b) $x^2 - |x| = 6$

3. Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám?

4. Oldjuk meg az egyenleteket:

a) $\sqrt{3x^2 + 5x - 3} = x$ b) $x + 1 = \sqrt{5x + 1}$ c) $\sqrt{x + 9} = 1 + \sqrt{x}$ d) $\sqrt{5 - x} = 0,5x - 3$

5. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $x^2 - 3|x - 1| - 7 = 0$ b) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ d) $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{5x-3}{3x+5}$ e) $|2x - 5| = x - 1$

6. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket: a)
$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 17xy \\ x + y = 10 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} xy + y^2 = 55 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

7. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet! $\sqrt{x+2} = -x$

8. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! $|x - |x|| = 2x + 1$

9. Oldja meg a $[4; 6]$ alaphalmazon az egyenletet. $|5 - |x|| = 3$

10. Határozza meg $\frac{x}{y}$ értékét, ha $\frac{2x+3y}{4x+2y} = \frac{9}{10}$ ($y \neq 0, y \neq -2x$).

11. A p, q, r pozitív számok összege 180. Tudjuk továbbá, hogy $p:q = 7:8$ és $r:p = 5:3$. Határozza meg ezeket a számokat!

12. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenleteket:

$$\sqrt{-2x+6} = x+1$$

$$2\log_4 x^2 + 3\log_4 x^3 = \log_4 x^4 + \log_4 8^9$$

13. Egy jótékonysági rendezvényen sorsjegyeket árulnak. 5 kék és 3 zöld sorsjegy 6700 Ft-ba, 3 kék és 2 zöld sorsjegy 4200 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül külön-külön egy kék, illetve egy zöld sorsjegy?

II.

14. Oldja meg az egyenletet, amelyben a p paraméter valós számot jelöl!

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{p}{x^2+2x} + \frac{1}{2x-x^2} = 0$$

15. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán! $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3} = 2$

16. Igazolja, hogy a négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x^2+x-10}{2x-1-2} = 0$ b) $\sqrt{x+16} + \sqrt{x-9} = 5$ c) $\lg(x^2+x-6) = \lg(1-x^2)$

17. Egy fából készült négyzetes oszlop minden élének hossza centiméterben mérve 2-nél nagyobb egész szám. A négyzetes oszlop minden lapját befestettük pirosra, majd a lapokkal párhuzamosan 1 cm élű kis kockára vágtuk. A kis kockák közül 28 lett olyan, amelynek pontosan két lapja piros. Mekkora lehetett a négyzetes oszlop térfogata?

18. Oldjuk meg az egyenleteket:

a) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 1$

b) $\sqrt{x-7} + \sqrt{3-x} = 2$

c) $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} = 2$

19. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|x-1| + |x-2| = 2$

b) $||x| - 1| = 4 + x$

c) $|2x-3| + |2x+3| = 6$

20. Mutassa meg, hogy az $x^3 - 3x^2 + x - 3$ polinom szorzattá alakítható, és ennek segítségével határozza meg a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ függvény zérushelyeit!

21. Oldjuk meg az egyenletrendszereket a rendezett valós számpárok halmazán!

$$\text{a) } \begin{cases} 2x = 12 - y \\ 2\sqrt{x} = y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3 \\ \frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0 \end{cases}$$

22. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény: $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 10 + 10x - x^2$. Igazolja, hogy a $[2; 8]$ intervallumon az f és a g függvény is csak pozitív értékeket vesz fel!

23. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán! $\sqrt{6x - 24} = \sqrt{2x - 7} - 1$

24. Lali, Pali és Vali egy palacsintázóban ebédelnek. Lali 3ogyorókrémes, 1 túrós és 2 fahéjas palacsintáért 1500 Ft-ot, Pali 4ogyorókrémes, 2 túrós és 1 fahéjas palacsintáért 1740 Ft-ot, Vali pedig 1ogyorókrémes, 2 túrós és 2 fahéjas palacsintáért 1170 Ft-ot fizetett. Mennyibe kerül 1-1 darab a különböző fajta palacsintákból?

25. Legyen $f: [1; \infty[\rightarrow [1; \infty[, x \rightarrow 2x + 1$ és $g: [1; \infty[\rightarrow [1; \infty[, x \rightarrow \sqrt{x}$. Oldja meg az $f(g(x)) = g(f(x))$ egyenletet!

III.

26. Mely x, y valós számok elégítik ki az egyenletet? $\frac{2}{\cos^2 x} = \sin^2 x (-y^2 + 8y - 8)$

27. a) Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán: $||x - 1| + x - 3| = -\frac{1}{2}x + 2$

b) Határozza meg az m paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek pontosan két megoldása legyen: $||x - 1| + x - 3| = mx + 2$.

28. Oldjuk meg ezt a szép egyenletet: $16^{\sin^2 x} + 4^{1+\cos 2x} = 10$

29. Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós $(x; y)$ számpár, amelyre $(x^2 + 5)^2 = 25 - |y - 3|$ és $21x + 63y = 188$

30. A mérnökök egy új fejlesztésű autó üzemanyag-fogyasztását igyekeznek meghatározni különböző sebességek mellett. Eddig három mérési adat áll rendelkezésre: ezek szerint 40 km/h sebesség mellett 9,6 liter, 70 km/h sebesség mellett 6,9 liter, 120 km/h sebesség mellett pedig 6,4 liter a 100 km-enkénti üzemanyag-fogyasztás.

a) A mérési adatokkal számolva mennyi lenne ennek az autónak a 100 km-re vonatkozó átlagos üzemanyag-fogyasztása egy olyan úton, amelyen 30 percig 40 km/h sebességgel, majd 50 percen át 120 km/h sebességgel halad?

Három mérnök olyan f függvényeket keres, amelyek minél jobban közelítik az ismert mérési eredményeket, azaz amelyekre az $|f(40) - 9,6| + |f(70) - 6,9| + |f(120) - 6,4|$ összeg értéke minél kisebb.

Mérnök Csaba az elsőfokú $f_1(x) = 11,2 - 0,04x$ függvényt, Mérnök Dóra pedig az $f_2(x) = \frac{|x|100}{10} + 4$ abszolútérték függvényt javasolja az autó 100 kilométerenkénti fogyasztásának közelítésére (x az autó fogyasztását jelöli km/h-ban, a fogyasztást pedig literben kapjuk meg).

b) Melyik függvény közelíti jobban a fenti értelemben a három mérési eredményt?

Mérnök Elemér azt a másodfokú $f_3(x) = ax^2 + bx + c$ függvényt kereste meg, amely mindhárom mérési adat esetén pontos eredményt ad, az $f_3(40) = 9,6$, $f_3(70) = 6,9$, $f_3(120) = 6,4$. Határozza meg az a, b, c paraméterek értékét.

III. Egyenlőtlenségek

		f.37-38.	44-45.	16-17.	
--	--	----------	--------	--------	--

I.

1. Jelölje H a $[0, 2\pi]$ intervallumot. Legyen A a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre teljesül a $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és B a H halmaz azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül $2^{\cos x} < 1$ egyenlőtlenség. Adja meg az A halmazt, a B halmazt és az $A \setminus B$ halmazt!

2. Mely valós számok elégítik ki az egyenlőtlenséget? $(x-1)^3 - (x+1)^3 > -8$

3. Oldja meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán: $0,5x + \sqrt{x+3} \leq 2,5$

4. Jelölje A az $\frac{x+4}{x-3} \leq 0$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát, B pedig az $|x+3| < 4$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát. Elemei felsorolásával adja meg az $A \cap B$, az $A \setminus B$ és az $A \cup B$ halmazt!

5. Adottak az $x \geq 0$ valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 2x + 2$, valamint ugyancsak az $x \geq 0$ valós számok halmazán értelmezett $g(x) = \frac{1}{2}x + 8$ függvények. Oldja meg az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenséget!

6. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket: a) $-x^2 - 6x + 27 \leq 0$ b) $2x^2 + 3x - 2 \leq 0$

7. a) $\frac{3x+1}{2x-5} > 2$ b) $\frac{x+4}{2x+3} \leq -2$ c) $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{2} < \frac{x+1}{x-2}$

8. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe. Igazolja, hogy ha $x \in]0, 3[$, akkor $y > 0$.

9. Jelölje a $4x^2 - 19x + 22 < 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát A , a $\sin 2x < 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmazát pedig B . Igazolja, hogy $A \subset B$.

10. b) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja!

Ha $x > 27$, akkor a 27-nek és az x -nek a mértani közepe kisebb a két szám számtani közepénél.

c) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

11. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenségeket!

a) $\lg x < 2$

b) $4x < 5 - x^2$

c) $0,5^{|x-3|} < 0,25$

12. Oldja meg az $\frac{x-4}{x-6} \leq -1$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

13. Oldja meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! $\sqrt{\frac{x}{5}} - 4 < 20$

14. Egy egyetemi előadáson 32-en ülnek a kisteremben. Ha négy lány távozna, akkor a jelenlévők több mint 60%-a fiú lenne. Ha azonban a 32 emberhez további hat lány csatlakozna, akkor a jelenlévők több mint fele lenne lány. Hány fiú és hány lány lehet jelen az előadáson?

II.

15. Oldja meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! $\sqrt{x^2 - 3x} \cdot \log_{0,1}(x + 2) < 0$

16. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5-x}\}$ és $B = \{x \in \mathbb{R}, \log_{0,5}(2x-4) > -2\}$.
Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat.

17. Oldjuk meg a valós számok halmazán: a) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$ b) $|x^2 - 6x + 8| \leq x - 2$

18. Határozza meg a kifejezés értelmezési tartományát! $\frac{\sqrt{x^2-9x+14}}{\sqrt{-x^2+16x-55}}$

19. Legyen az A halmaz az a), a B halmaz a b) kifejezés értelmezési tartománya.

Ábrázolja számegyenesen a $B \setminus A$ halmaz elemeit! a) $\log_{x+5}(x^2 - 9x + 14)$ b) $\sqrt{\frac{10-x}{x^2+4}}$

20. A p mely értéke esetén teljesül minden x-re, hogy $-2,5x^2 + px + p + 1,6 < 0$?

21. Adott az f, a g és a h függvény:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} f(x) = 2^x - 1, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} g(x) = 3x + 2, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} h(x) = 12 - x^2$$

Oldja meg az $f(g(x)) < g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

22. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény: $f(x) = x^2 - 2$,
 $g(x) = 10 + 10x - x^2$. Oldja meg a valós számok halmazán az $|f(x) + g(x)| \geq 8$ egyenlőtlenséget!

23. Igazolja, hogy $\frac{\lg 5^x + \lg 5^{-x}}{2} \leq \lg \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$ ($x \in \mathbb{R}$)

24. Hány egész szám gyöke van az egyenlőtlenségnek? $\log_{0,5}(2x + 100) \geq -8$

25. Van két, most induló hosszú távú befektetésünk is. Az egyiknél 500 000 forint a befektetett összeg, amely havi 1%-os kamatos kamattal növekszik. A másik – magasabb hozamú, de kockázatosabb – üzletbe 450 000 forintot fektettünk; ez az összeg havi 1,3%-os kamatos kamattal növekszik.
b) Hányadik hónap végén lesz először több pénz a második befektetésünkben, ha a kamatfeltételek közben nem változnak?

26. Mutassa meg, hogy a következő kijelentés igaz! Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{3}{(1+\cos x)^2+2}$ függvény értékkészlete az $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ intervallum.

III.

27. Legyen $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $x \in \mathbb{R}$. Mely pozitív valós a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x) dx \geq 0$?

28. Pali és Zoli közösen egy $60 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ -es, téglalap alakú telket vásárolt. A telket egymás között két olyan egybevágó derékszögű trapézra osztották fel, amelynek a rövidebb alapja 20 m. Jelölje EF a közös határvonal szakaszt! A közös határvonalon Palinak kellett volna kerítést építtetni, de nem volt erre a célra pénze. Ezért Zolinak a következő ajánlatot tette: átad neki a telkéből egy háromszög

alakú részt, ha Zoli csináltatja meg a telküket elválasztó kerítést. Zoli szeretne volna telkének 20 m-es határát maximum 8 méterrel megnövelni, így elfogadta az ajánlatot, és az új közös határvonalnak az EG szakaszt jelölte meg. A telek négyzetméterének ára 30 000 Ft, a kerítés megépítésének költsége 15 000 Ft/m. Az egyéb felmerülő költségeket egyenlő arányban osztották meg. Legalább hány m hosszú legyen a FG szakasz, hogy Zoli járjon jobban? (Az eredményt egy tizedesre kerekítve adja meg!)

29. Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza p , a másiké pedig q ($p > 0$, $q > 0$). (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.) Bizonyítsa be, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne kisebb, mint a két összeolvasztott kocka felszínének összege!

IV. Függvények

91-106.	43-48.	53-67.	19-25.	11-12.	
---------	--------	--------	--------	--------	--

I.

1. a) Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett, $x \mapsto \frac{1}{2}|x-4| + 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! b) Állapítsa meg a függvény értékkészletét!

2. Ábrázolja a $[0; 6]$ intervallumon $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt!

3. Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \leq -1 \\ 2x + 1, & \text{ha } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{és } g(x) = x^2 - 2$$

Ábrázolja ugyanabban a koordináta-rendszerben mindkét függvényt!

Adja meg az $f(x)=g(x)$ egyenlet valós megoldásait!

4. Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans:

$$f: D_f = \mathbb{R} - \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad x \mapsto (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \cdot \sin 2x$$

5. Az f és g függvényt is a $[-3; 6]$ intervallumon értelmezzük. $f(x) = \sqrt{x+3}$ $g(x) = -0,5x + 2,5$. Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f és a g függvényt a $[-3; 6]$ intervallumon! Igazolja számolással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám!

6. Adott az $f: [-2; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$. Jellemezze a függvényt a következő szempontok szerint: növekedés, fogyás szélsőérték (helye és értéke)!

7. Ábrázolja a $[0, 2\pi]$ intervallum értelmezett $f(x) = |2 \sin x - 1|$ függvényt!

8. a) Mely pontban metszi az f függvény az y tengelyt? b) Mely pontban metszi a g függvény az x tengelyt? $f(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{3}{4}x + \frac{5}{3}$ és $g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5x}{12} + 0,5$

9. Ábrázold a függvényt és írd függvényvizsgálatot: $f(x) = -\frac{1}{2} \sin x - 3$

10. Adott az f és g függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$.

Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit!

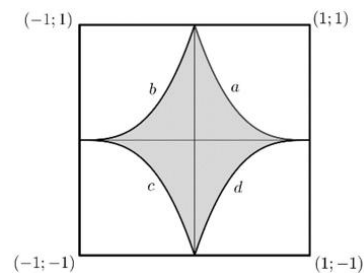
11. Adott az f , g és a h függvény:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2^x - 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 3x + 2$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = 12 - x^2$

Legyen a k összetett függvény belső függvénye az f , külső függvénye a h , vagyis $k(x) = h(f(x))$ minden x valós szám esetén. Igazolja, hogy $k(x) = 11 + 2^{x+1} - 4^x$.

12. Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $x \in \mathbb{R}$. Adj meg egy olyan nem nulla hosszúságú intervallumot, amelyen a g mindegyik helyettesítési értéke negatív!

13. Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint. Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, illetve $(1; -1)$, akkor ebben a koordináta-rendszerben az a jelű ív egyenlete: $y = (1 - x)^3$, $0 \leq x \leq 1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus. Írja fel a másik három (az ábrán b , c , illetve d jelű) ív egyenletét is!



14. Egy bizonyos fenyőfa (méterben mért) várható magasságának becslésére ezt a képletet használják:

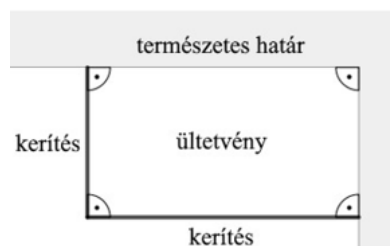
$h(t) = \frac{30}{1 + 59 \cdot 0,905^t}$, ahol t a megfigyelés kezdetétől eltelt idő években számítva.

a) Hány méter magas volt a fa a megfigyelés kezdetekor?

b) A megfigyelés kezdetétől számítva hány év múlva lesz a fa 10 méter magas?

Különleges facsemeték neveléséhez egy téglalap alakú részt akarnak elkeríteni. A téglalap két szomszédos oldala természetes határokkal védhető, ezért csak a másik két oldalon kell kerítést építeni. A környezeti adottságok miatt a kerítés építési költsége a két oldalon különböző: az egyik oldalon 5 ezer Ft/m, a másik oldalon pedig 10 ezer Ft/m. A kerítés építésére összesen 400 ezer Ft áll rendelkezésre.

d) Hogyan kell megválasztani a két kerítésszakasz hosszát, hogy a rendelkezésre álló összegből a legnagyobb területű ültetvényt lehessen elkeríteni?



II.

15. a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ kifejezés értelmezhető!

b) Ábrázolja a $[-5; 8]$ intervallumon az $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt!

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti f függvényre vonatkozóan? (Az indoklást nem kell leírnia.)

A: Az f értékkészlete: $[0; 5]$.

B: Az f függvény minimumát az $x = -3$ helyen veszi fel.

C: Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4; 8]$ intervallumon.

16. Az f függvényt a $[0; 5]$ intervallumon értelmezzük: $f(x) = 3\cos x - \cos(-x)$. Döntse el az állításokról, hogy igazak-e! A válaszait indokolja! Az f függvény korlátos. Az f függvény minimumhelye és legnagyobb értéke is irracionális szám.

17. Adott a valós számok halmazán $x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$ függvény.

a) Számítsa ki a függvény zérushelyeit és számítsa ki a függvény minimumának helyét és értékét!

b) Ábrázolja a függvényt a $[-2; 4]$ intervallumon!

c) Határozza meg az $y = 2x^2 - 4x - 6$ egyenletű parabola fókuszpontjának koordinátáit!

18. Adott az f és a g függvény.

$f: D_f = \mathbb{R} - \left\{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \quad x \mapsto (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \cdot \sin 2x \quad g: D_g = [-7; 7] \quad x \mapsto x^2 - 6|x|$

a) Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans!

b) Számítsa ki a g függvény zérushelyeit!

c) Adja meg a g függvény értékkészletét!

19. Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyiszor 400 Ft-tal csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat.

Adja meg annak a B függvénynek $x \mapsto B(x)$ hozzárendelési utasítását, amelynél x az utasok számát, $B(x)$ pedig a társaság bevételeit jelöli x utassal indított járat esetén! Mi a B függvény értelmezési tartománya?

20. A következő három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos(\log_2 \sqrt{x})$

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$

c) $\log_{\sqrt{x}}(\cos^2 x)$

21. a) Ábrázolja a valós számokon értelmezett $f(x)$ függvényt!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 10, & \text{ha } x \geq 1 \\ x + 4, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$$

b) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $|f(x)| = p$ egyenletnek egy vagy két megoldása legyen!

22. Adottak a következő függvények:

$f: x \in [-5, 10[\quad x \mapsto ||x - 2| - 2| - 2|$ és $g: x \in]-1, 4] \quad x \mapsto -x^2 + 4x + 2$

a) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az f és a g függvényeket.

b) Milyen x értékekre igaz, hogy $f(x) > g(x)$?

23. A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ ($p \neq -2$) függvényről tudjuk, hogy pontosan két zérushelye van, továbbá, hogy $f(2) = -p$. Határozza meg a függvény zérushelyeit!

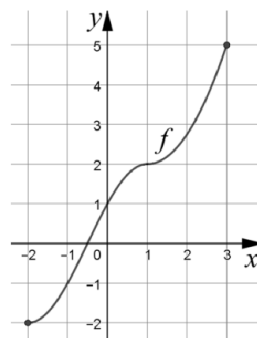
24. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ függvény. Legyen k egy valós szám. Hány megoldása van az $\sqrt{f(x)} = k$ egyenletnek?

25. Oldd meg grafikusán: $\frac{3x-10}{x-4} \leq -(x-5)^2 + 5$

26. Mi a következő függvények értelmezési tartománya és értékkészlete?

a) $y = 3 + \frac{2}{x-1}$ b) $y = \frac{2x+8}{x-1}$ c) $y = -4 - \frac{4}{x}$

27. Az ábrán a $[-2; 3]$ intervallumon értelmezett szigorúan monoton, folytonos f függvény grafikonja látható. Adja meg az f inverzfüggvényének értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, és jellemezze az inverzfüggvényt monotonitás szempontjából!



28. Határozza meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvényben az a , b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről a következőket tudjuk:

(1) $f(0) = 1$; (2) $f(1) = 0$; (3) $f'(2) = f''(1)$, vagyis az f első deriváltjának $x = 2$ -ben vett értéke megegyezik az f második deriváltjának $x = 1$ -ben vett értékével.

29. Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0,8x^2(x-3)(1,5-x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.) Mutassa meg, hogy csak $1,5 < x < 3$ esetén nyereséges a napi termelés!

III.

30. Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer (S) síkjában.

Az A halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátáira: $4x - 3y \geq 18$, a B halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátáira $x^2 + y^2 - 6x + 4y \leq 0$, a C halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátáira: $y^2 = 4$.

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatot alkotnak az A , a B és a C halmaz pontjai!

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B \setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz?

c) Ábrázolja a $B \cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x; y)$ pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától?

31. a) Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az $f: [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ függvényt!

b) Tekintsük az $|(x-2)^2 - 1| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében!

c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k \in]-6; 6[$ intervallumon!

d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét!

31. Ábrázolja az $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ halmazon értelmezett $f(x) = \left| \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} \right|$ függvényt!

32. Számítással igazolja, hogy $h:]-\infty, -0,5[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő! $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$

V. Sorozatok (A)

Számítani és mértani sorozatok

	49-52.			50-56.	
--	--------	--	--	--------	--

I.

1. Egy növekedő számtani sorozat első három tagjának összege 60. Az első tagot 64-gyel növelve, a másik két tagot változatlanul hagyva, egy mértani sorozat első három tagjához jutunk. Mennyi a két sorozat első három tagja?
2. Daninak két kedvenc tantárgya van, a matematika és a biológia. Az egyik délután egy kisállat-kereskedés akváriumában megszámlolta a nagy piros és a kis csíkos halakat. A nagy piros halak száma p , a kis csíkosaké c . Testvérének, Katának nem árulta el, hány halat számolt meg, de a következőket elmondta neki: „A 4, a p és a c számok ebben a sorrendben egy mértani, a p , a c és a 40 számok pedig ebben a sorrendben egy számtani sorozat egymás utáni tagjai.” Hány darab nagy piros és hány darab kis csíkos halat számolt meg Dani az akváriumban?
3. Kinga 10. születésnapja óta kap havi zsebpénzt a szüleitől. Az első összeget a 10. születésnapján adták a szülők, és minden hónapban 50 Ft-tal többet adnak, mint az azt megelőző hónapban. Egy bizonyos hónapban, mikor éppen 1850 Ft volt a havi zsebpénze, összeadta az addig kapott összes zsebpénzét. Az összeg 35100 Ft lett. Mennyi volt Kinga induló zsebpénze, és hány hónap telt el a 10. születésnapja óta?
4. A főiskolások műveltségi vetélkedője a következő eredménnyel zárult. A versenyen induló négy csapatból a győztes csapat pontszáma $\frac{4}{3}$ -szorosa a második helyen végzett csapat pontszámának. A negyedik, harmadik és második helyezett pontjainak száma egy mértani sorozat három egymást követő tagja, és a negyedik helyezettnek 25 pontja van. A négy csapatnak kiosztott pontok száma összesen 139. Határozza meg az egyes csapatok által elért pontszámot!
5. Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Számítsa ki a háromszög másik két oldalának hosszát!
6. Egy számtani és egy mértani sorozatnak közös az első és a második eleme, a mértani sorozat harmadik eleme eggyel nagyobb a számtani sorozat harmadik eleménél, és hárommal nagyobb a mértani sorozat első eleménél. Írjuk fel mindkét sorozat első öt elemét.
7. Egy nem állandó számtani sorozat tagjai pozitív egész számok. Az első négy tag összege egyenlő a rájuk következő három tag összegével. Számítsa ki az első 15 tag összegét, ha tudjuk, hogy ez az összeg nagyobb 900-nál, de kisebb 1000-nél!
8. Egy számtani sorozat első két tagjának összege egyenlő a differencia ötszörösével. A sorozat első 10 tagjának összege 195. Melyik ez a számtani sorozat?
9. Éva egy 7×7 -es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.) Mennyi a táblázatba írt 49 szám összege, ha Éva a harmadik sor harmadik mezőjébe a 91-et, az ötödik sor ötödik mezőjébe pedig a 11-et írta? (Lásd az ábrát a XI. fejezet 33. feladatánál.)

10. A sérült olajkutatót végül sikerült elzárni, így az olajfolt területének növekedése megállt. Ekkor kezdték meg az olajszennyezés eltávolítását. A környezetvédelmi hatóság a $12\,400\text{ m}^2$ területű olajfolt megszüntetésére 31 napos határidőt szabott meg. Az első napon még csak 130 m^2 -ről sikerült eltávolítani az olajfoltot (így a területe $12\,270\text{ m}^2$ lett), de a teljesítményt növelni tudták: az egy nap alatt megtisztított terület mérete minden nap ugyanakkora értékkel nőtt. Mekkora ez a napi növekedés, ha pontosan az előírt határidőre sikerült a $12\,400\text{ m}^2$ -es olajfolt teljes eltávolítása?

11. Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot!

12. Egy mértani sorozat hányadosa $\frac{1}{4}$, a sorozat első öt tagjának összege 852,5. Határozza meg a sorozat első tagját! Számításai során ne használjon közelítő értéket!

13. a) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130. Adja meg a sorozat ötödik tagját!

b) A $\{b_n\}$ mértani sorozat első és harmadik tagjának összege 26, a második és negyedik tagjának összege pedig 130. Adja meg a sorozat ötödik tagját!

14. a) Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 3, az első n tag összege pedig 4900. Határozza meg n értékét!

b) Egy mértani sorozat első és második tagjának összege 6, harmadik és negyedik tagjának összege pedig 96. Adja meg a sorozat első tagját és hányadosát!

15. a) Egy számtani sorozat 20. tagja 108. A sorozat első 20 tagjának összege 1115. Számítsa ki a sorozat első tagját és differenciáját!

b) Egy mértani sorozat első tagja 3, és hányadosa is 3. A sorozat első n tagjának szorzata 3435. Számítsa ki n értékét!

16. Négy szám közül az első három szám egy számtani, az utolsó három szám pedig egy mértani sorozat egymást követő három tagja. Az első szám a 3, a negyedik szám a 25. Határozza meg a másik két számot!

II.

17. Egy pozitív tagokból álló mértani sorozat első három tagjának összege 26. Ha az első taghoz egyet, a másodikhoz hatot, a harmadikhoz hármast adunk, akkor ebben a sorrendben egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Adja meg ennek a számtani sorozatnak az első három tagját!

18. Legyen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{21}$ egy számtani sorozat első huszonegy tagja. Közülük a páratlan sorszámúak összege 15-tel nagyobb, mint a páros sorszámúak összege. Tudjuk továbbá, hogy $a_{20} = 3a_9$. Határozza meg az a_{15} értékét!

19. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alapéle 18 egység, testátlója $36\sqrt{2}$ egység. Az alapél és a testátló hosszát – ebben a sorrendben – tekintsük egy mértani sorozat első és negyedik tagjának! Igazolja, hogy az alaplap átlójának hossza ennek a sorozatnak második tagja!

20. Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első három tagja: a, b, c . Ha az első két tag változatlanul hagyása mellett a harmadik tagot $(a + 2b)$ -vel csökkentjük, akkor egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Az $a, b + 9, c$ számok ebben a sorrendben ugyancsak egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Határozza meg az a, b és c számokat!

21. Egy mértani és egy számtani sorozatnak is 1 az első tagja, és mindkét sorozat hatodik tagja (-1) .
a) Sorolja fel mindkét sorozat első öt tagját! b) Milyen pozitív egész n -re lesz a két sorozat első n tagjának összege ugyanakkora?

22. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, a hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom jegyű tagja van a sorozatnak?

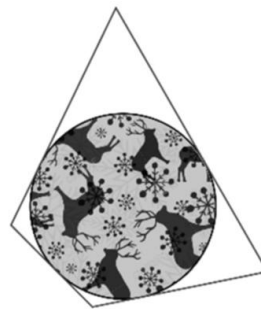
23. Adott az $a_n = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7^3} \cdot \frac{1}{7^5} \cdot \dots \cdot \frac{1}{7^{2n-1}}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat. Melyik az a legnagyobb n természetes szám, amelyre $a_n > 49^{-50}$?

24. A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n -edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n-1)$ -edik órában megtett útjának, ahol $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Hány kilométert tesz meg a tizedik órában a magyarok versenyautója? Válaszát egész kilométerre kerekítve adja meg!

25. a) Egy balatoni cukrászdában a nyári szezon első napján eladtak 166 gombóc fagyit. Mivel egyre jobb lett az idő, így 2 héten keresztül minden nap több fagyi fogyott; minden nap 17 gombóccal többet adtak el, mint a megelőző nap. a) Hány gombóc fagyit adtak el a 14. napon. b) A cukrászda tulajdonosa először 2000 gombóc fagynak megfelelő nyersanyagot tárolt. Hány nap alatt fogy el ez a mennyiség, ha minden nap 17 gombóccal több fagyi fogy el, mint az előző napon?

26. a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

27. A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődisz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm. Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza?



28. Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 852,5; első tíz tagjának összege pedig 2330. Számítsa ki a sorozat első tagját és differenciáját!

29. a) Igazolja, hogy nincs olyan 2-nél nagyobb n egész szám, melyre $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

b) Határozza meg azokat az 5-nél nagyobb n egész számokat, melyekre $\binom{n}{4}, \binom{n}{5}, \binom{n}{6}$ (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

30.

Legyen h a valós számok halmazán értelmezett függvény, ahol $h(x) = x^2 + \underline{p}x + r$.

b) Határozza meg p és r értékét, ha $\underline{h}(1)$, $\underline{h}(3)$ és $\underline{h}(4)$ (ebben a sorrendben) egy számtani, $\underline{h}(1)$, $\underline{h}(2)$ és $\underline{h}(4)$ pedig (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat egymást követő tagjai!

31. a) Egy számtani sorozat harmadik tagja 5, tizenharmadik tagja 22. Határozza meg a sorozat első 100 tagjának összegét!
- b) Egy számtani sorozat első tagja 91, differenciája 2. Határozza meg azt az n pozitív egész számot, amelyre a sorozat első n tagjának összege n^3 .
- c) Egy mértani sorozat első tagja 1,6, hányadosa 2. Az első tagtól kezdve legalább hány tagot kell összeadni, hogy az összeg nagyobb legyen egymilliárdnál?

III.

32. Bizonyítsa be, hogy egy mértani sorozat első n elemének, második n elemének és harmadik n elemének összege egy mértani sorozat három egymást követő eleme!

33. Az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ egész számokból álló mértani sorozatok. Az egyes sorozatok hányadosai és bizonyos tagjai között a következő összefüggések érvényesek:

- (1) a_1, b_1, c_1 ebben a sorrendben egy olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, amelynek 2 a hányadosa
- (2) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sorozatok hányadosai ebben a sorrendben egy olyan számtani sorozat szomszédos tagjai, amelynek 1 a különbsége
- (3) $a_2 + b_2 + c_2 = 24$
- (4) $c_1 + c_2 + c_3 = 84$

Adja meg mindhárom eredeti mértani sorozat első három tagját!

34. Egy iskola egyéni sakkbajnokságának döntőjében minden versenyző egyszer játszott a többi döntőbe jutott versenyzővel. A verseny végén kiderült, hogy a versenyzők elért pontszámai egy szigorúan növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. Hányan versenyeztek a döntőben és hány pontja volt a győztesnek, ha az utolsó helyezett összesen 1 pontot szerzett? (A sakkversenyen győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont jár.)

35. Három teljes gráf pontjainak száma egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Igazolja, hogy a három gráf éleinek száma ekkor nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő tagja! (Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

36. Egy mértani sorozat n -edik tagja $a_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. ($n \in \mathbb{Z}^+$)

a) Határozza meg azt a legkisebb n értéket, amelyre $|a_n| < 10^{-7}$

b) Határozza meg a mértani sorozat első tíz tagjának összegét. Válaszát $-\frac{k}{m}$ alakban adja meg, ahol k és m relatív prímek.

A b_n sorozat n -edik tagja $b_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$. ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Igazolja, hogy minden pozitív egész n -re $2 \cdot b_{n+2} - b_{n+1} - b_n = 0$.

VI. Halmazok

		1-4.			
--	--	------	--	--	--

A logikai szita formula:

két halmazra: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

három halmazra: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

I.

1. Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a – javítatlan – szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel? b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten?

2. Egy ország öt nagyvárosában összesen 27 bevásárlóközpont működik. Közülük 12-ben van mozi, 16-ban van étterem és 13-ban van autómosó szolgáltatás. Három olyan bevásárlóközpont van, ahol mindhárom szolgáltatást nyújtják. A mozival rendelkező bevásárlóközpontok közül 5-ben nincs autómosó, az étteremmel rendelkezők közül pedig 5-ben van mozi. Kilenc olyan bevásárlóközpont van, melyekben e szolgáltatások közül csak étterem van. Hány olyan bevásárlóközpont van az országban, melyben pontosan két szolgáltatást nyújtanak e három közül?

3. Az 1, 2, 3,, n pozitív egész számok felhasználásával halmazokat képeztünk a következő módon: A halmaz a páros számok halmaza. B halmaz a 3-mal osztható számok halmaza. C halmaz az 5-tel osztható számok halmaza. Ha az $A \cap B \cap C$ halmaznak 2 eleme van, akkor hány eleme lehet az $(A \cap B) \setminus C$ halmaznak? Ha a $B \setminus (A \cup C)$ halmaznak 9 eleme van, akkor hány eleme lehet a $C \setminus (A \cup B)$ halmaznak?

4. Az A, B, C halmazok mindegyike az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz részhalmazai. Határozzuk meg őket, ha tudjuk a következőket: $A \cap B = \{2\}$, $(A \cup B) \cap C = \{5, 6\}$, $A \setminus C = \{2, 3, 4\}$, $C \setminus B = \{1, 5\}$

5. Az $\{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmaz A, B, C részhalmazairól tudjuk, hogy $A \cap B = \{10\}$, $A \setminus B = \{7, 8, 9\}$, $(A \cup B) \setminus C = \{1, 8, 9, 10\}$, $C \setminus B = \{5, 6, 7\}$. a) Határozzuk meg az A, B, C halmazokat. b) Ábrázoljuk Venn-diagrammal. c) Hány elemű az $A \cap B \cap C$ halmaz? d) Hány elemű az $(A \cup B) \cap C$ halmaz?

6. Az A és a B halmazokról a következőket tudjuk:

a) $|A| = 8$, $|B| = 6$, és $|B \setminus A| = 4$. Határozzuk meg $|A \cup B|$ -t és $|A \cap B|$ -t.

b) $|A| = 7$, $|A \cup B| = 15$, és $|A \cap B| = 3$. Határozzuk meg $A \setminus B$ és $B \setminus A$ elemszámát.

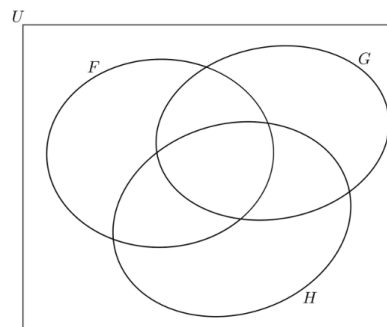
c) A a hattal, B a héttel osztható kétjegyű számok halmaza. Határozzuk meg $|A \cup B|$ -t és $|A \cap B|$ -t.

d) $|A| = 7$, $|B| = 10$ Mekkora lehetnek a következő értékek? $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|A \setminus B|$, $|B \setminus A|$

7. Egy 28 fős érettségiző osztályban összeszámolták a nyelvvizsgákat, és a következő eredményre jutottak. Tíz főnek van csak angol, 4 főnek csak angol és német, 3 főnek van csak német és francia nyelvvizsgálata. A német nyelvvizsgák száma 11, az angol vagy francia nyelvvizsgáké pedig 21. Ugyanannyian tettek csak francia vizsgát, mint ahányan csak francia és angol vizsgát. Senkinek sincs három nyelvvizsgálata. a) Hány diáknak van pontosan egy vizsgálata? b) Hányan nem rendelkeznek nyelvvizsgálattal az osztályban?

8. Legyen az U alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az F halmaz az U elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a G halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a H halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

- a) Az ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az U -nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz!
b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot!



9. Legyen a H alaphalmaz az egyváltozós valós függvények halmaza, M , K és A pedig a H következő részhalmazai:

$M = \{\text{az értelmezési tartományukon szigorúan monoton növekedő függvények}\};$

$K = \{\text{az értelmezési tartományukon konvex függvények}\};$

$A = \{\text{alulról korlátos függvények}\}$

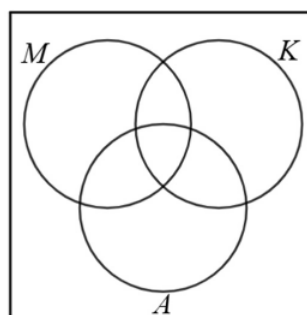
- a) Helyezze el az alábbi hozzárendelésekkel megadott függvények betűjelét az ábra megfelelő részébe!

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

$$g: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

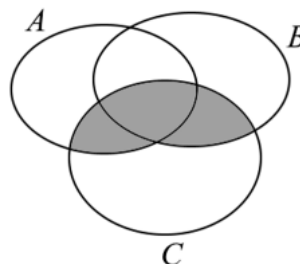
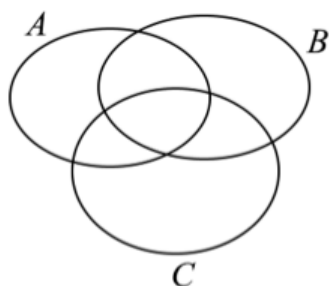
$$h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto 2^x$$

$$i: \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$



- b) Jelölje az ábrán satírozással a $(K \cap A) \setminus M$ halmazt, és hozzárendelési szabályával adjon meg egy olyan j függvényt, amely ebbe a halmazba tartozik!

10. a) Satírozza be a bal oldali ábrán a $B \setminus (A \cap C)$ halmazt!



- b) Adja meg halmazműveletek segítségével a jobb oldali ábrán szürke színnel jelzett részhalmazt!

Legyen a H alaphalmaz a függvények halmaza, Z , K és P pedig a H következő részhalmazai:

$Z = \{\text{zérushellyel rendelkező függvények}\};$

$K = \{\text{kölcsönösen egyértelmű függvények}\};$

$P = \{\text{páratlan függvények}\}$

- c) Helyezze el a következő hozzárendelésekkel megadott függvények betűjelét az ábra megfelelő részébe.

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto |x|$$

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^2 + 2$$

$$h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \lg x$$

$$i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

II.

11. Egy 30 fős tudóscsoport a számítógépeknek a kutatásban, az oktatásban és a kommunikációban betöltött szerepével foglalkozik. Közülük mindenki publikált már legalább az egyik témában. A csoport tagjai közül 12-en írtak már tanulmányt a számítógép kutatásban betöltött szerepéről, 18-an a számítógép oktatásban betöltött szerepéről, és 17 tudós jelent meg tanulmánya a számítógépnek a kommunikációban betöltött szerepéről. A csoportban 7 olyan tudós van, aki a fentiek közül pontosan két témakörben jelentetett már meg tanulmányt. a) Egy televíziós beszélgetésre véletlenszerűen kiválasztanak a csoport tagjai közül egy tudóst. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott tudós mindhárom témakörben jelent már meg tanulmánya? b) Hány olyan tudós van a csoport tagjai között, aki kifejezetten specialista, azaz csak az egyik témakörben jelent meg tanulmánya?

12. Egy zeneiskolában három hangszeren: zongorán, gitáron és szaxofonon lehet tanulni. Tavaly 18 tanuló iratkozott be a zeneiskolába. Közülük mindenki egy vagy két hangszeren tanult játszani, három hangszeren egyikük sem. Tizenöten tanultak zongorázni, nyolcan gitározni és heten szaxofonozni. a) Hányan tanultak pontosan két hangszeren játszani?

Ebben a zeneiskolában nem volt olyan diák, aki tanult volna gitározni is és szaxofonozni is. A csak egy hangszeren tanulók közül azok, akik szaxofonozni tanultak, kétszer annyian voltak, mint azok, akik gitározni tanultak.

b) Hányan voltak, akik zongorázni és gitározni is tanultak? Hányan voltak, akik zongorázni és szaxofonozni is tanultak?

13. Egy egyetem mesterképzőjére jelentkező 29 hallgatónak nyilatkoznia kellett arról, van-e angol, német vagy francia nyelvvizsgájuk. Mindenki válaszolt mind a három kérdésre. A jelentkezők közül angol nyelvvizsgája 22, német 18, francia 18 hallgatónak van. 12 hallgatónak német és francia nyelvvizsgája is van, de közülük 3 főnek nincs angol nyelvvizsgája. Az angol nyelvvizsgával rendelkezők közül 7-nek nincs német és 8-nak nincs francia nyelvvizsgája. Hányan válaszoltak mindhárom kérdésre igennel és hányan válaszoltak mindhárom kérdésre nemmel?

14. Egy 32 fős érettségiző osztály tanulói három különböző táncot mutatnak be a szalagavató bálon. A következő táblázat az egyes táncokban fellépő diákok számát mutatja nemenkénti bontásban.

	Keringő	Kán-kán	Hip-hop	Egyik sem
Lány	9	6	10	2
Fiú	9	0	4	2

Van két olyan lány, aki mindhárom táncban fellép, ugyanakkor nincs olyan fiú az osztályban, aki egynél több produkcióban részt venne. Az osztály tanulói közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető pontosan két táncban szerepel?

15. Egy kisvárosi gimnáziumnak 366 növendéke van. A 12. évfolyamra 84-en járnak, közülük 22 kollégista. A kollégiumban összesen 124 diák lakik.

a) Hány olyan diák van az iskolában, aki nem 12-es és nem is kollégista?

b) A három 12-es osztályba (A, B és C) járó tanulók száma egy $d = 3$ differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai. Az A és B osztályokban ugyanannyi kollégista van, a C osztályban pedig eggyel több. Hány nem kollégista diák jár az egyes 12. évfolyamú osztályokba?

16. Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálat. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étte-

remben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem? b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?

17. Egy matematikaverseny döntőjében a résztvevő diákoknak 3 feladatot kellett megoldaniuk. Aranyérmet azok kaptak, akik mindhárom feladatot megoldották, ezüstérem azoknak járt, akik két feladatot oldottak meg, bronzérmes pedig azok, akik 1 feladatot tudtak megoldani. (A részt vevő diákok mindegyike megoldott legalább 1 feladatot.) Az első feladatot 19-en, a másodikat 21-en, míg a harmadikat 16-an oldották meg. Két diák kapott aranyérmet, 12-en kaptak ezüstérmet.

a) Hányan kaptak bronzérmet? b) Mit mondhatunk azok számáról, akik csak a 2. feladatot oldották meg.

18. Egy lakodalomban háromféle óriástortát szolgáltak fel a résztvevőknek: csoki-, puncs- és almatortát. A csokitortát 49-en kóstolták meg, a puncsból 36-an ettek, míg az almatortából 43 résztvevő fogyasztott.

a) 24 olyan résztvevő volt, aki pontosan kétfajta tortából evett. A menyasszony és a vőlegény mindhárom tortát megkóstolta. Legfeljebb hányan lehetnek azok, akik csak egyfajta tortából ettek?

b) Mindhárom tortából 3-an fogyasztottak. Azok száma, akik ettek csokitortát, de nem ettek puncsot: 42. Akik csak puncsot ettek 17-en, akik csak almásból ettek 12-en voltak. Hány résztvevője volt ennek az esküvőnek, ha minden résztvevő evett valamilyen tortát?

19. Egy osztály tanulói matematikadolgozatot írtak, melynek során három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladatot összesen 22-en oldották meg, közülük a második feladatot is megoldotta 16 tanuló. Azok, akik mindhárom feladatot megoldották, háromszor annyian voltak, mint akiknek csak az első feladat sikerült. Azok, akik csak az első két feladatot tudták megoldani, két és félszer annyian voltak, mint akik csak az első és a harmadikat. Hány tanuló oldotta meg mindhárom feladatot?

20.

Egy kék és egy zöld dobókockával dobunk, a dobás kimenetele egy számpár. Jelölje (k, z) a dobásnak azt a kimenetelét, amikor a kék kockával dobott szám k , a zöld kockával dobott szám pedig z . Legyen a H alaphalmaz a dobás kimeneteleként megkapható összes lehetséges (k, z) számpár halmaza.

Az A , B és C részhalmazokat a következőképpen definiáljuk:

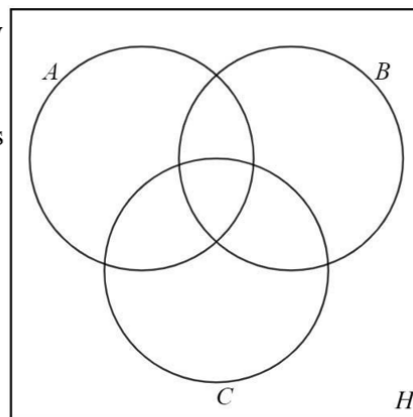
$$A = \{(k, z) \mid k + z \text{ összeg prím}\}$$

$$B = \{(k, z) \mid k \cdot z \text{ szorzat prím}\}$$

$$C = \{(k, z) \mid k = z\}$$

d) Satírozással jelölje a Venn-diagrammon a H -nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz!

A Venn-diagram minden egyes további tartományába írjon egy-egy megfelelő számpárt! Válaszát itt nem kell indokolnia.



III.

21. Egy nyugdíjas klub 61 tagjának mindegyike részt vett a tavalyi három kirándulás valamelyikén. Akik pontosan két kiránduláson voltak, háromszor annyian vannak, mint akik mindhárom kiránduláson részt vettek. Azok száma, akik csak az első, csak a második, illetve csak a harmadik kiránduláson vettek részt egy pozitív tagú, 3 differenciájú számtani sorozat szomszédos elemei. Azok száma, akik az első és a harmadik, az első és a második, a második és a harmadik kiránduláson vettek részt egy 1 differenciájú számtani sorozat szomszédos elemei. Csak a második kiránduláson 10-nél kevesebben

vettek részt. a) Hányan vettek részt az első, a második, illetve a harmadik kiránduláson? b) A legalább két kiránduláson részt vevők háromnegyede nő, a mindhárom kiránduláson részt vevők fele nő volt. Igazolja, hogy ha bármely két kirándulást kiválasztjuk, akik csak e két kiránduláson vettek részt nem lehetnek mindannyian férfiak!

22. Egy szivattyúkat gyártó cég a selejtes termékeket visszavásárolja a forgalmazóktól, és a selejstraktárban tárolja. A selejtes termékek hibájuk alapján háromféle hibakódot kaphatnak. A törött termékek „T”, a hiányos termékek „H” és az egyéb hibával rendelkező termékek „E” kódot kapnak. Egy termék többféle hibakódot is kaphat a hibái alapján. A selejstraktárban az év végi nyilvántartás szerint a csak T kóddal, a csak H kóddal és a csak E kóddal rendelkező termékek darabszáma megegyezik. Olyan selejtes termék nincs, amelynek háromféle kódja is van. T kódja 35 terméknek, H kódja 40, E kódja pedig 45 terméknek van. Kétszer annyi terméknek van T és E kódja is, mint ahánynak T és H kódja is. Hány selejtes termék van a selejstraktárban?

VII. Exponenciális és logaritmikus világ

				1-24.	
--	--	--	--	-------	--

I.

1. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$a) \lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2 \quad b) 2^x = 3^{2x+1}$$

2. Oldja meg az egyenletrendszert! Az x és az y valós számokat jelölnek.

$$\begin{aligned} \log_2(2x+y) - \log_2(x-1,5y) &= 2 \\ \log_3(x+y) + \log_3(x-y) &= 2 + \log_3 5 \end{aligned}$$

3. Oldja meg az egyenleteket!

$$a) 0,5^{2-\log_{0,5} x} = 3, \text{ ahol } x > 0, x \in \mathbb{R} \quad b) 7 + 6 \log_x \frac{1}{2} = \log_2 x, \text{ ahol } 1 < x \leq 2, x \in \mathbb{R}$$

4. A $[-2; 5]$ intervallum mely legbővebb részhalmazán értelmezhető a

$$g(x) = \frac{1}{\lg(x^2+2x-3)-\lg 5} \text{ kifejezés?}$$

5. Oldjuk meg az egyenleteket: a) $4 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 20$ b) $\log_4^2(x+1) + 3 \log_4(x+1) = 10$

6. Oldjuk meg az egyenleteket: a) $\frac{1}{3} \lg(271 + 3^{\sqrt{2x}}) = 1$ b) $2^{x+4} + 2^{x+3} + 2^x = 5^{x+1} - 5^x$

7. Egy mikrobusz ára 14 millió Ft. Ez a jármű évente 12%-ot amortizálódik. a) Mennyi idő múlva ér már kevesebbet a mikrobusz, mint az eredeti árának a fele? b) Egy cég vásárolt egy ilyen mikrobuszt, és egy másikat is, melynek értéke 17,5 millió Ft. Ez utóbbi évente 15%-ot amortizálódik. Kb. mennyi idő múlva lesz a két mikrobusz értéke egyenlő?

$$8. a) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 65 \quad b) 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x-1} + 2^{x+1} = 25 \quad c) 4^x + 2^x = 30,$$

$$d) 9^x + 8 = 2 \cdot 3^{x+1} \quad e) \log_3(x+1) - 1 = \log_9(x-1)$$

$$9. a) \lg(3x+1) > \lg(5x-2) \quad b) \log_3 x < \frac{1}{3}, c) \log_{0,5} x > 4$$

d) $\log_{0,7} x < 0,7$

e) $\log_{0,5}(x + 5) < -1$ f) $\log_x(5 - 2x) < 1$

10. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenleteket! $25^{\lg x} = 5 + 4 \cdot 5^{\lg x}$

11. Oldja meg az egyenletrendszer (x és y pozitív valós számok)
$$\begin{cases} x + y = 0,2 \\ \frac{\lg x + \lg y}{2} = \lg \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

12. A járvány terjedésére vonatkozó előrejelzések szerint a nagyvárosban a fertőzöttek száma minden nap az előző napi érték 105%-ára növekszik. Ha a növekedés üteme az előrejelzés szerint alakulna, akkor hány nap alatt emelkedne a város összlakosságának 0,2%-áról az összlakosság 1%-ára az összes fertőzött száma?

13. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 50 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} + 30 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} = 81$$

14. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán! $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} = 324$

15. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\log_3(x + 8) + \log_3(x - 2) - \log_3(x + 4) = 1$$

$$3 \cdot 9^x - 3^{x+3} = 3^x - 9$$

16. Egy kis szigeten élő állatfajok populációinak egyedszámát egy modell szerint (jó közelítéssel) a következő képlet adja meg: $P(t) = \frac{E}{1+k \cdot 2^{-ct}}$

A képletben $P(t)$ az adott faj populációjának egyedszáma a vizsgálat kezdetétől számított t év elteltével, E , k és c pedig az adott faj populációjára jellemző pozitív állandók: E a sziget eltartóképessége (a becsült maximális egyedszám, amit a sziget el tud tartani), k a populáció kezdeti méretétől, c pedig a populáció növekedési sebességétől függő állandó.

a) Egy emlősfajra jellemző állandók értéke $k = 1,5$ és $c = 0,05$. Tudjuk, hogy a vizsgálat kezdetétől számított 8 év elteltével 140 egyedből áll a faj populációja. Határozza meg a szigetnek az erre az emlősfajra jellemző eltartóképességét!

b) Egy rágcsálófaj esetén a sziget eltartóképessége 1500 egyed. Határozza meg az erre a populációra jellemző k és c állandók értékét, ha a vizsgálat kezdetekor 200, öt évvel később pedig 350 egyedből állt a populáció!

c) Igazolja, hogy egy populáció $P(t)$ egyedszáma a modell szerint soha nem haladhatja meg a sziget (adott populációra jellemző) eltartóképességét

II.

17. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5-x}\}$ és $B = \{x \in \mathbb{R}, \log_{0,5}(2x-4) > -2\}$.

Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat.

18. Adott az $a_n = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7^3} \cdot \frac{1}{7^5} \cdot \dots \cdot \frac{1}{7^{2n-1}}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat. Melyik az a legnagyobb n természetes szám, amelyre $a_n > 49^{-50}$?

19. Oldjuk meg az egyenleteket: a) $\sqrt{\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4} = \log_2 \frac{4}{x}$

$$b) \sqrt{\log_2^2 x - 4(\log_2 x^2 - 4)} = \frac{1}{\log_x 2} + 3^{\log_9 4}$$

$$c) 2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$$

20. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 y} = -\frac{1}{2}, \quad \log_2(2x) + \log_2(2y)^2 = 3$$

21. Oldjuk meg a pozitív egész számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:
$$\left. \begin{aligned} x^{y^2-15y+56} &= 1 \\ y-x &= 5 \end{aligned} \right\}$$

22. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$\log_2(2x+y) - \log_2(2x-y) = 1, \quad x^2 + y^2 = 9 + 2xy$$

23. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $7^{\lg x} - 5^{1+\lg x} > 3 \cdot 5^{-1+\lg x} - 13 \cdot 7^{-1+\lg x}$

24. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$a) \frac{3^x+5}{2} + \frac{2}{3^x+5} = \frac{50}{7} \quad b) 2,5 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{2}{\log_3 x+5} = \frac{50}{7}$$

25. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán! $|\log_2(x-4)| + \log_2 x = 5$

26. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán! $\log_{36}(30 \cdot 6^x + 1) = \log_{25}\left(\frac{1}{5^x}\right)$

27.

$$3 \cdot \log_4 x + 2 \cdot \log_8 x^2 = 34 \quad 6^{2x+1} \cdot 2^{x^2} = 9^x \cdot 24 \quad 9^{x+1} + 24 = 11 \cdot 3^{2x-1} + 8 \cdot 3^{x+1}$$

28. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! $2^{2(x-1)(x+4)} = 4^{\frac{x-1}{x+4}} \quad (x \neq -4)$

29. a) A laptopokban is használt B típusú lítiumion-akkumulátorok töltéskapacitása minden teljes töltési ciklusnál az előző értékének körülbelül 0,06%-ával csökken. Hány százalékkal csökkent az új akkumulátor töltéskapacitása, ha 350 teljes töltési ciklust végeztek vele?

b) Egy B típusú akkumulátorral minden évben körülbelül 200 teljes töltési ciklust végeznek. (Tételezzük fel, hogy két töltési ciklus között mindig ugyanannyi idő telik el.) Mennyi a felezési ideje a kezdetben új akkumulátor töltéskapacitásának (azaz töltési kapacitása mennyi idő alatt csökken a felére)?

30.

Amikor egy csésze forró folyadékot beviszünk egy szobába, akkor a folyadék hőmérsékletének változását jó közelítéssel – Newton lehülési törvénye szerint – a következő képlet írja le:

$$T(t) = H + (T(0) - H) \cdot 2^{ct}.$$

A képletben $T(t)$ a folyadék hőmérséklete a vizsgálat kezdetétől számított t perc elteltével, H a szoba (állandónak tekinthető) hőmérséklete, $T(0)$ a folyadék kezdeti hőmérséklete ($T(0) > H$), c pedig a lehülő folyadékot jellemző konstans. (A hőmérsékletet °C-ban mérjük.)

Egy csésze 75 °C-os kávé beviszünk egy 25 °C hőmérsékletű szobába.

A kávéra jellemző c érték – 0,209.

a) Számítsa ki, hogy negyedóra múlva milyen hőmérsékletű lesz a kávé!

b) A vizsgálat kezdetétől számítva mennyi idő múlva hűl le a kávé 25,5 °C hőmérsékletűre?

Egy csésze 85 °C-os hőmérsékletű kávé beviszünk egy ismeretlen hőmérsékletű szobába. 10 perc alatt a kávé 40 °C-ra hűl le.

c) Határozza meg a szoba hőmérsékletét!

III.

31. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán: $6 \cdot (3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = (x^2)^{\log_3 x} - 6075$

32. A Robotvezérelt Elektromos Kisautók Nemzetközi Versenyén a versenyzők akkumulátorral hajtott modellekkel indulnak. A magyar versenyautó az első órában 45 kilométert tesz meg. Az akkumulátor teljesítményének csökkenése miatt az autó a második órában kevesebb utat tesz meg, mint az első órában, a harmadik órában kevesebbet, mint a másodikban, és így tovább: az indulás utáni n -edik órában megtett útja mindig 95,5%-a az $(n-1)$ -edik órában megtett útjának. A versenyen több kategóriában lehet indulni. Az egyik kategória versenyszabályai lehetővé teszik az akkumulátorcserét verseny közben is. A magyar csapat mérnökei kiszámították, hogy abban az órában még nem érdemes akkumulátort cserélni, amelyekben az autó legalább 20 km-t megtesz. b) Az indulástól számítva legkorábban hányadik órában érdemes akkumulátort cserélni?

A „Végkimerülés” kategóriában a résztvevők azon versenyeznek, hogy akkumulátorcseré és feltöltés nélkül mekkora utat tudnak megtenni az autók. A világrekordot egy japán csapat járműve tartja 1100 km-rel. c) Képes-e megdönteni a magyar versenyautó a világrekordot a „Végkimerülés” kategóriában?

33. Oldjuk meg az egyenleteket:

$$1 + \lg(3^{x-3} + 15) = \lg 3 + \lg(9^{x-3} - 1) \qquad \sqrt{\log_2^2 x - 10 \cdot \log_2 x + 25} = 5 - \log_2 x$$

$$\lg(4^{x-2} + 9) - \lg(2^{x-2} + 1) + \lg 2 - 1 = 0$$

34. Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\begin{aligned} (4^{\log_2 x})^{\log_y 2} &= 32 \cdot (8^{\log_2 y})^{\log_x 2} \\ (3^{\log_2 x})^{\log_y 2} &= 3 \cdot [3^{2-\log_2 y^2}]^{\log_y 2} \end{aligned}$$

35. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\sqrt{\log_4^2(2x-6) - \log_4(2x-6)^6 + 9} = \log_4 \frac{64}{2x-6}$$

36. Oldja meg az egyenletrendszert a racionális számok halmazán:

$$\begin{aligned} \log_x 4 - \log_y^2 2 &= \frac{1}{\log_2 x \cdot \log_2 y} \\ \log_y 4 + \log_x y &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

37. Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé” válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában $4 + 3 = 7$ új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14, és így tovább.) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanak a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót?

VIII. Százalékszámítás

84-86.					
--------	--	--	--	--	--

I.

1. Adott egy kék és egy piros kocka. A piros kocka felszíne 25%-kal kisebb, mint a kék kocka felszíne. Hány százalékkal kisebb a piros kocka térfogata, mint a kék kocka térfogata?

2. Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban, és egy népesedésdinamikai modell előrejelzése alapján 2050-ben.

Feltételezzük, hogy Pakisztán lakossága 1988 és 2050 között minden évben ugyanannyi százalékkal nő, mint amennyi százalékkal az előző

évben növekedett. Ezzel a feltételezéssel élve – millió főre kerekítve – hány lakosa lesz Pakisztánnak 2020-ban? (Az évi százalékos növekedés két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon!)

Sorrend	1988		2050 (előrejelzés)	
	Ország	Népesség (millió fő)	Ország	Népesség (millió fő)
1	Kína	1255	India	1533
2	India	976	Kína	1517
3	Egyesült Államok	274	Pakisztán	357
4	Indonézia	207	Egyesült Államok	348
5	Brazília	165	Nigéria	339
6	Oroszország	148	Indonézia	318
7	Pakisztán	147	Brazília	243
8	Japán	126	Banglades	218

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

3. Egy kereskedő cég bevételei két forrásból származnak: bolti árusításból és internetes eladásból. Ebben az évben az internetes árbevétel 70%-a volt a bolti árbevételnek. A cég vezetői arra számítanak, hogy a következő években az internetes eladásokból származó árbevétel évente az előző évi internetes árbevétel 4%-ával nő, a bolti eladásokból származó árbevétel viszont évente az előző évi bolti árbevétel 2%-ával csökken. Számítsa ki, hány év múlva lesz a két forrásból származó árbevétel egyenlő!

4. A tavaszi idény utolsó bajnoki mérkőzésén a Magas Fiúk Kosárlabda Klubjának (MAFKK) teljes csapatából heten léptek pályára. A mérkőzés után az edző elkészítette a hét játékos egyéni statisztikáját. A táblázat mutatja a játékosok dobási kísérleteinek számát és az egyes játékosok dobószázalékát egészen kerekítve. (A dobószázalék megmutatja, hogy a dobási kísérleteknek hány százaléka volt sikeres.) Számítsa ki, hogy mennyi volt a csapat dobószázaléka ezen a mérkőzésen!

Játékos mezszáma	Dobási kísérletek száma	Dobószázalék
4	2	50
5	3	0
6	10	60
7	8	25
10	7	43
13	6	33
15	14	57

5. Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$ -os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje). Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

6. Egy olajkút meghibásodása miatt a tenger felületén összefüggő olajfolt keletkezett. A szakemberek műholdak segítségével 15 percenként megmérték a folyamatosan növekvő olajfolt területét, és úgy tapasztalták, hogy az minden alkalommal 2%-kal nagyobb, mint az előző érték volt. Ha az első megfigyeléskor 400 m^2 volt az olajfolt kiterjedése, akkor mekkora lesz a területe egy nap múlva?

7. A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg azt tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 Ft/kg, a II. osztályút 650 Ft/kg, a III. osztályút pedig 450 Ft/kg egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós eladási egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte. Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!

8. Egy külföldi utazás teljes árú vasúti menetjegye tavaly 209 euróba került. A menetjegy árát fél évvel ezelőtt p euróval felemelték, majd a múlt héten p százalékkal csökkentették ($p > 0$). Így a menetjegy ára 189 euró lett. Határozza meg p értékét!

9. A feljegyzések szerint a millennium évében, 1896-ban a sikló összesen 670 ezer utast szállított. Tételezzük fel, hogy a sikló egy napi üzemideje 14 óra volt, s kéthetente egy napra karbantartás céljából leállították a közlekedését, azaz megközelítőleg 340 napot üzemelt az év során. A menetek közti átlagos követési időköz 10 perc volt. Akkoriban egy-egy kocsi egyszerre 22 utast szállíthatott. A pályán összesen két kocsi közlekedik: egy menetben az egyik felfelé, a másik lefelé halad ugyanabban az időben.

b) A megadott adatok alapján számítsa ki, hogy kb. hány százalékos volt a férőhelyek átlagos kihasználtsága 1896-ban!

10. Egy szöveget ketten lektorálnak, Aliz és Hanna. Aliz az összes hiba $p\%$ -át fedezte fel, és a Hanna által felfedezett hibáknak is éppen a $p\%$ -át találta meg. A szövegben Aliz 35, Hanna 40 hibát vett észre, ezek közül 28 hibát mindketten észrevettek. Az összes hiba közül hányat nem vett észre egyikük sem

II.

11. Az érett szilva tömegének kb. 5%-a a mag tömege. A kimagozott szilva átlagosan 90% vizet és 10% ún. szárazanyagot tartalmaz. A szilva aszalásakor a szárítási technológia során addig vonunk el vizet a kimagozott szilvából, amíg a megmaradt tömegnek csak az 5%-a lesz víz, a többi a változatlan szárazanyag-tartalom. Az így kapott terméket nevezzük aszalt szilvának. Mutassa meg, hogy 10 kg leszedett szilvából 1 kg aszalt szilva állítható elő!

12. András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, hogy naponta 10 000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A harmadik napon ismét 10%-kal növelte az előző napi adagját, a negyedik napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon, és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, párosan 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon. Hány métert úszott le András a hatodik napon?

13. Egy újfajta, enyhe lefolyású fertőzőbetegségben a nagyvárosok lakosságának 5%-a betegszik meg. A betegek 45%-a rendszeres dohányos, a betegségben nem szenvedőknek pedig csak 20%-a dohányzik rendszeresen. Számítsa ki, hogy a rendszeres dohányosoknak és a nem dohányosoknak hány százaléka szenved az új betegségben! (Válaszát egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

14. A városban az egyik ruhakereskedéssel foglalkozó kisvállalkozás 80%-os haszonkulccsal dolgozik. Ez azt jelenti, hogy például egy 10 000 Ft-os beszerzési értékű terméket 18 000 Ft-ért árulnak az üzletükben. Amikor akciós időszak van, akkor a „rendes” eladási árból 50%-os árengedményt adnak minden eladott termékre.

Mekkora volt az eladásból származó árbevételnek és az eladott áru beszerzési értékének a különbsége (vagyis az „árnyereség”) a tavalyi évben, ha összesen 54 millió Ft volt az éves árbevétel, és ebből 9 millió Ft-ot az akciós időszakban értek el?

15. Egy pár kesztyű árát először p százalékkal csökkentették, majd a csökkentett ár $p+4,5$ százalékaival tovább mérsékelték. A kétszeri árcsökkentés után a kesztyű 18,6%-kal olcsóbb lett, mint az árcsökkentések előtt volt. Határozza meg a két árcsökkentés százalékos értékét!

16. Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot?

b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat: $y = -\frac{1}{5}x + 200$ ($0 < x < 1000$)

17. Kovács úr új autót vásárolt 5 millió forintért. Egy matematikai modell szerint az autó egy év alatt elveszíti az aktuális értékének 12%-át.

a) Ha csak az értékvesztést vesszük figyelembe, akkor hány teljes év elteltével ér 1,5 millió forintnál kevesebbet Kovács úr autója?

A Precíz Kft. havi amortizációval (értékvesztéssel) számolja ki a gépjármű aktuális értékét. (Havi amortizáció: az autó értéke minden hónapban az előző havi értékének ugyanakkora százalékaival csökken.)

b) Mutassa meg, hogy ha az éves értékvesztés 12%-os, akkor a havi amortizáció megközelítőleg 1,06%-os.

Kovács úr szeretné eladni törésmentes és jó állapotú autóját a Precíz Kft.-nek. A Kft. szórólapján az áll, hogy kétféleképpen is kiszámítják az autó aktuális értékét, és az eladó számára kedvezőbb árat garantálják. I. módszer: a jelenlegi akciójukban 12 hónapot levonnak az autó valós életkorából, majd 1,06%-os havi amortizációval számolják ki az autó értékét. II. módszer: az autó által megtett kilométerek alapján számítják ki az autó „életkorát” úgy, hogy évente átlagosan 15 000 km-es megtett utat feltételeznek; ebben az esetben azonban 1,2%-os havi amortizációval számolnak (az 1,06% helyett), és nincsen 12 hónap kedvezmény.

c) Melyik számítási módszer a kedvezőbb Kovács úr számára, ha az autója 8 éves 5 hónapos, és az autó eddig 91 250 km utat tett meg?

III.

18. Egy ékszerész vállalta, hogy elkészít 20 db egyforma tömegű ajándéktárgyat. Az egyes ajándéktárgyak a következő féldrágakövek valamelyikéből készültek: achát, hematit, zöld jade és gránát. A kész ajándéktárgyakat a megrendelő átvételkor egyben lemérte. A 20 tárgy együttes tömege megfelelt a megrendelésnek. Otthon egyenként is megmérte a tárgyakat, és kiderült, hogy a féldrágakövekből készített négyféle ajándéktárgy közül egyik sem a megrendelt tömegű. Az ugyanabból az anyagból készületeket egymással azonos tömegűnek mérte. A három achát tárgy mindegyike 1%-kal kisebb; a hat darab hematit tárgy mindegyike 0,5%-kal kisebb, a hét zöld jade tárgy mindegyike 1,5%-kal nagyobb a megrendelésben szerepelt értéknél. A gránát tárgyak tömege hány százalékkal tért el a megrendeléstől?

19. Egy egyetem három karán összesen 10500 hallgató tanul. Diákrektort választanak. A jelöltek: Alkimista, Bagoly és Flótás. A választáson a hallgatók 76%-a vett részt. A szavazatok 90%-ának összesítése után a következő eredményekről tudósított a kollégium rádiója: Alkimista szavazatainak száma 2014, Bagolyé 2229 és Flótásé 2805.

- a) Az eddig feldolgozott szavazatoknak hány százaléka volt érvénytelen? (A választ egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)
- b) Vázolja kördiagramon az eddig feldolgozott szavazatok százalékos megoszlását! Tüntesse fel az egyes tartományokhoz tartozó középponti szögek nagyságát fokban mérve! (A megfelelő százalékokat és szögeket egész pontossággal adja meg!)
- c) Megnyerheti-e Alkimista a választást? (A választást az nyeri, aki a legtöbb szavazatot kapja.)
- d) 95%-os feldolgozottságnál legalább hány százalékkal vezessen Flótás az utána következő jelölt előtt, hogy már matematikailag is biztos lehessen a győzelemben? (A megfelelő legkisebb százalékot egy tizedesjegy pontossággal adja meg!)

20. Egy üzletben háromféle palackozott ecet van a polcon: 12 db 10%-os, 8 db 15%-os és 5 db 20%-os. Mindegyiket azonos csomagolásban, 1 literes kiszerelésben árulják.

- a) Hány százalékos ecetet kapnánk, ha a polcon lévő összes ecetet összeöntenénk?

Kázmér elképzelése az, hogy egy palack ecet árát az üres palack árából, a tömény ecet, valamint a tiszta víz literenkénti árából kalkulálják ki.

- b) Az üres palack ára 30 Ft, a tömény ecet literje 500 Ft és a tiszta víz literje 10 Ft. Mennyibe kerülne a három különböző töménységű palackozott ecet az üzletben, ha a fogyasztói ár a Kázmér elképzelése szerint kalkulált ár 120%-a? (A fogyasztói árat a végén kerekítik egész forintra!)

Kázmér felírta a literes palackok bolti árait: a 10%-os ecet 144 Ft, a 15%-os 150 Ft, a 20%-os 156 Ft.

- c) Ha ezeket az árakat a b) részben leírtak szerint kalkulálták, akkor ki lehet-e mindezekből számítani az üres palack, a tömény ecet és a tiszta víz árát?

21. Egy egyetem 10.580 hallgatójának tanulmányi lapjáról összesítették az angol és német nyelvvizsgák számát. Kiderült, hogy a német nyelvvizsgával nem rendelkezők 70%-ának, a német nyelvvizsgával rendelkezők 30%-ának nincs angol nyelvvizsgája. Az angol nyelvvizsgával nem rendelkezők 60%-ának német nyelvvizsgája sincs.

- a) Ezek közül a hallgatók közül hányan rendelkeztek angol és hányan német nyelvvizsgával?
- b) A hallgatók hány százaléka rendelkezett az angol és német nyelvvizsgák mindegyikével?

22. Egy pillepalack alakja forgáshenger. A palack tartalmát kiöntve, a palackot összenyomva, annak eredeti térfogata 2p százalékkal csökken. Egy hulladékot újrahasznosító cég (speciális gép segítségével) az ilyen módon tömörített palack térfogatát annak további p százalékaival tudja csökkenteni. Az összenyomással, majd az ezt követő gépi tömörítéssel azt érik el, hogy a palackot eredeti térfogatának 19,5 százalékára nyomják össze. Határozza meg p értékét!

23. Egy 2011-ben készült statisztikai összehasonlításban a következőket olvashattuk: „Ha New York-ban az átlagfizetést és az átlagos árszínvonalat egyaránt 100%-nak vesszük, akkor Budapesten az átlagfizetés 23,6%, az átlagos árszínvonal pedig 70,9%. (Az árszínvonal számításához 122 áru és szolgáltatás árát hasonlították össze.)” Feltételezve, hogy az idézet megállapításai igazak, válaszoljon a következő kérdésekre!

- a) Ha Budapesten a havi átlagfizetés 150 ezer forint, akkor hány dollár (\$) a havi átlagfizetés New York-ban, 190 forint/dollár (Ft/\$) árfolyammal számolva? Válaszát egész dollárra kerekítve adja meg!
- b) Ha a New York-i havi átlagfizetésből egy bizonyos termékből 100 kg-ot vásárolhatunk New York-ban, akkor körülbelül hány kg-ot vásárolhatunk ugyanebből a termékből a budapesti havi

átlagfizetésből Budapesten? (Feltehetjük, hogy a szóban forgó termék budapesti egységára 70,9%-a a termék New York-i egységárának.)

24. Egy bank olyan hitelkonstrukciót ajánl, amelyben napi kamatlábat számolnak úgy, hogy az adott hitelre megállapított éves kamatlábat 365-tel elosztják. Egy adott évben a hitelfelvételt követően minden napra kiszámolják a napi kamat értékét, majd ezeket december 31-én összeadják és csak ekkor tőkésítik (azaz a felvett hitel értékéhez adják). Ez a bank egy adott évben évi 8%-os kamatlábat állapított meg. Éva abban az évben a március 1-jén felvett 40 000 Ft után október 1-jén újabb 40 000 Ft hitelt vett fel. A két kölcsön felvétele után mennyi kamatot tőkésít a bank december 31-én? (A hitelfelvétel napján és az év utolsó napján is számítanak napi kamatot.)

25. Egy kerékpáros ugyanazt az utat állandó sebességgel szokta megtenni. Egy alkalommal az út első harmadát a szokásos sebességével, második harmadát pedig szokásos sebességénél $p\%$ -kal kisebb sebességgel tette meg. Ekkor úgy érezte, hogy késésben van, így az út utolsó harmadát szokásos sebességénél $2p\%$ -kal nagyobb sebességgel tette meg és így menetideje a szokásos volt. Határozza meg p értékét!

26. Egy szarvasmarha telepen 1000 tehenet tartanak. Ezek egy évben 7.300.000 liter tejet adnak. A telep vezetősége azt tapasztalta, hogy - valószínűleg az egy marhára jutó legelőterület növekedése miatt - ha a tehenek számát 5% -kal csökkentik, akkor az egy tehenre jutó éves tejhozam 10% -kal növekszik. a) A tehenek számának 5% -os csökkentésével hány literrel növekszik az éves tejtermelés a gazdaságban? b) Ilyen állomány esetében az a tény, hogy a tehenek számának $p\%$ -os csökkentésével egy tehen éves tejhozama $2p\%$ -kal növekszik, csak $p < 20$ esetén érvényes. Hány százalékkal kell csökkenteni a tehenállományt, hogy az éves tejtermelés 10% -kal növekedjen?

IX. Sorozatok II.

				57-61., 79-82.	
--	--	--	--	----------------	--

Sorozatok tulajdonságai

II.

- Igazolja, hogy a $\left\{\frac{3n+2}{4n+1}\right\}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos!
- Bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatok korlátosak: a) $\left\{\frac{2n-3}{n}\right\}$ b) $\left\{\frac{n^2+1}{n^2-4}\right\}$ c) $\{\sqrt[n]{3}\}$
- Válasszuk ki a következő sorozatok közül a monoton növekedő, monoton csökkenő, illetve a szigorúan monoton sorozatokat.
a) $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ b) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ c) $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$ d) $\left\{\cos \frac{\pi}{n}\right\}$ e) $\{(-2) + 2^n\}$ f) $\{n^2 - 100n\}$ g) $\{-n^2 + 1\}$
- Tekintsük a következő állítást: Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz. (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)
b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

5. Igazolja, hogy az $a_n = \frac{2+2\pi n}{n}$ sorozat ($n \in \mathbb{N}^+$) sorozat szigorúan monoton csökkenő és korlátos, és adja meg a sorozat határértékét!

6. Számítsuk ki a sorozat határértékét: $a_n = \frac{30}{1+59 \cdot 0,905^n}$

III.

7. Legyen n pozitív egész. Adottak ezek a sorozatok: $a_n = (-2)^n + 2^n$, $b_n = |n - 23| - |n - 10|$, $c_n = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)^2$. Vizsgálja meg mindhárom sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából! Válaszoljon mindhárom esetben, hogy a sorozat korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem! (Válaszait indokolja!) Korlátos sorozat esetében adjon meg egy alsó és egy felső korlátot!

8. a) Igazolja, hogy $\frac{2}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$, ($n \in \mathbb{N}^+$)

b) Számítsa ki az $a_n = \frac{2}{(n+1)^2-1}$ sorozat első négy tagjának összegét. Válaszát $\frac{a}{b}$ alakban adja meg, ahol a és b relatív prím pozitív egész számok.

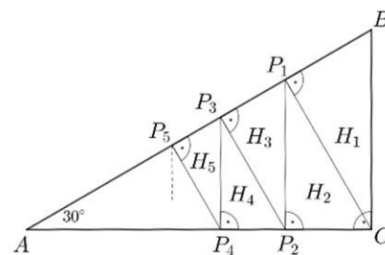
c) Határozza meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ határértéket.

9.

A háromszögből az átfogójához tartozó CP_1 magassága mentén levágjuk a H_1 -gyel jelölt háromszöget. Az így megmaradó ACP_1 derékszögű háromszögben végrehajtjuk ugyanezt a lépést: a H_2 háromszöget vágjuk le a háromszög átfogójához tartozó P_1P_2 magassága mentén, és így tovább (lásd az ábrán).

b) Ha ezt az eljárást 13-szor hajtjuk végre, akkor a 13 háromszög levágása után megmaradó háromszög területe hány százaléka az ABC háromszög területének?

c) Mekkora a végtelen sok szakaszból álló $CP_1P_2P_3P_4\dots$ töröttvonal hosszának pontos értéke, ha $CP_1 = 2 - \sqrt{3}$?



Mértani sorok

I.

10. Számítsuk ki a következő végtelen összegeket, ha konvergensek:

a) $6 - 3\sqrt{3} + \frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} + \dots$ b) $18 + 6 + 2 + \dots + \frac{18}{3^{n-1}} + \dots$ c) $-6 + 3 - \frac{3}{2} \pm \dots + (-1)^n \cdot \frac{6}{2^{n-1}} + \dots$

11. Egy pénzügyintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$ -os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje).

c) Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ határértéket, ha $q = 1,02$ és $H = 2\,000\,000$.

II.

12. Adott a $b_n = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \dots + \frac{1}{7^{2n-1}}$, $n \in \mathbb{N}^+$ sorozat. Számítsa ki a $\lim b_n$ határértéket!

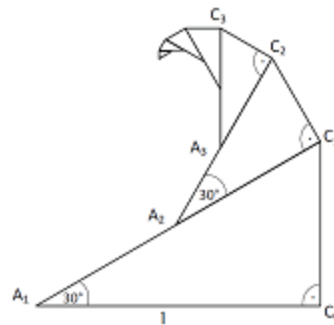
13. Rajzoljunk egy c oldalú négyzet oldalfelező pontjai által meghatározott négyzetet. E négyzet oldalfelező pontjait összekötve egy újabb négyzetet nyerünk. Ismételjük meg az eljárást – gondolatban végtelenségig – a kapott négyzetek mindegyikével. Mekkora lesz a keletkezett négyzetek kerületeinek, illetve területeinek összege?

III.

14. Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az A_1 csúcsnál 30° -os szög van, az A_1C_0 befogó hossza 1, az A_1C_1 átfogó felezőpontja A_2 . Az A_2C_1 szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljuk az ábra szerint. Az A_2C_2 átfogó felezőpontja A_3 . Az A_3C_2 szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzoljuk. Ez az eljárás tovább folytatható.

a) Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét. (Az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)

b) Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2\dots C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív egész n -re kisebb, mint 1,4.



15. Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belső négyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya 5:7. A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is 5 : 7. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismétljük. Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek?

16. Egy r sugarú gömbbe kockát írunk, a kapott kockába pedig gömböt. E gömbbe újabb kockát írunk, és így tovább a végtelenségig. Határozzuk meg a kockák térfogatainak összegét. Hányszorosa az eredeti gömb felszínének a kapott kockák felszíneinek összege?

17. Az $ABCDEF$ hatszög rövidebb átlójának hossza $5\sqrt{2}$. Az oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1 , a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2 , és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_1 + t_2 + \dots + t_n)$ határértéket! (Pontos értékekkel számoljon!)

Kamatosszámítás

I.

18. Egy szigeten élő rágszálópopuláció 3 havonként az aktuális létszám 20%-ával növekszik. Hány évvel ezelőtt voltak 10-en, ha jelenleg a számítások alapján 5 024 000 egyed él a szigeten?

19. Az A üzem termelése a B üzemtermelésének 80%-a. Az A üzem termelése évenként 10%-kal, a B üzemé évenként 6%-kal nő. Hány év múlva lesz a két üzem termelése egyenlő?

II.

20. 2004 januárjában bankba elhelyeztük megtakarított pénzünket, 1 000 000 forintot 9%-os évi kamattal. Két év múlva a bank 7%-ra csökkentette a kamatot. Újabb 3 év elteltével bankunk 5%-ra akarta csökkenteni a kamatlábát, ezért, még mielőtt életbe léptek volna az új kamatok, kivettük a számlánkon összegyűlt pénzt. a) Összesen hány százalékkal gyarapodott pénzünk az eltelt 5 év alatt? 2004 januárjában a dollár árfolyama 230 forint volt, öt év elteltével pedig 320 forint. b) 2004 januárjában, vagy 2009 januárjában tudunk több dollárt vásárolni a pénzünkből?

III.

21. Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100 000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100 000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első banki napján történhet, amely évben a gyermekük betölti a 18. életévét. A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napjára ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse!

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi fel, akkor választhatja a következő lehetőséget is: hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank – az első pénzfelvételtől számítva – minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse!

22. Ádám hitelekkel vett fel egy banktól évi 8%-os kamatos kamatra. Az egyik év január 1-jén éppen 1 000 000 Ft tartozása volt. Több hitelt nem vett fel, és attól kezdve 10 éven keresztül minden év végén befizette az azonos összegű törlesztőrészt. (A törlesztőrészlet összegét a bank már az éves kamattal megnövelt tartozásból vonja le.) Mekkora volt ez a törlesztőrészlet, ha Ádám a 10. befizetés után teljesen visszafizette a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg!

23. Öt éven át minden év elején elhelyezünk a takarékpénztárban 5000 Ft-ot 26%-os kamatláb mellett. Öt év eltelté után legalább hány teljes évet kell még várnunk, hogy pénzünk 105 000 forintra növekedjen?

24. Évi 6%-os kamatra kapott 60 000 forintot évenként egyenlő összeggel törlesztünk. Az első részletet egy évvel a kölcsön felvétele után fizetjük ki. Mennyi legyen az évi törlesztés, ha hat alkalommal fizetünk?

25. Betettem a bankba fix kamatozásra 50 000 forintot. a) Mekkora lesz ez az összeg 2 év alatti 9,2%-os kamatos kamattal? b) Ugyanezt az értéket egy év alatt hány százalékos kamattal értük volna el? c) Mennyi lesz a pénzem 2 év elteltével, ha havi lekötést választok és félévenként az éves kamatlábak a következők: 9,3%, 9,1%, 8,75%, 8,5%?

26. Tíz év alatt minden év elején 4000 forintot teszünk a bankba. Tíz év elteltével 4000 forintot veszünk ki évenként. Mennyi pénzünk lesz a huszadik év végén, ha 5%-os a kamat?

27. Tízezer forintot helyezünk el január elsején évi 4%-os kamatra. A következő év januárjától kezdve tíz éven át egyenlő összegeket akarunk felvenni minden év elején úgy, hogy a 10 év letelte után ne maradjon pénzünk. Mennyi pénzt vegyünk fel egy évben?

X. Számelmélet, oszthatóság

12-17.					
--------	--	--	--	--	--

I.

1. Kilenc számkártya fekszik az asztalon, rajtuk egy-egy pozitív egyjegyű számmal. Rakja négy csoportba a kilenc számkártyát úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála kisebb osztója! Adjon meg két lehetséges csoportosítást!

2. Határozzuk meg azokat a pozitív egész a számokat, amelyekre

a) $(15, a) = 1$, b) $(a, 48) = 24$, c) $[6, a] = 60$

3. Milyen számjegy állhat az ismeretlenek helyén, hogy az oszthatóság fennálljon?

a) $8 \mid \overline{6712a}$, b) $15 \mid \overline{34y25x}$, c) $12 \mid \overline{781b2a}$

4. A 28-nak melyik az a legnagyobb hatványa, amellyel a $16^{15} \cdot 35^{28}$ szorzat osztható?

5. Döntsük el, hogy négyzetszámok-e vagy nem?

a) $2^8 \cdot 3^{16} 5^{20} \cdot 7^{100}$, b) $2^{2014} \cdot 3^{2013}$, c) $8^{42} \cdot 9^7 \cdot 25^9$

6. Miért nem prímszámok? a) $10^{10} + 8$, b) 1002003004005, c) $10^{15} + 10^{25} + 25$

7. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek legnagyobb közös osztója 15, legkisebb közös többszöröse 1350.

8. Egy digitális kijelző órán az órák és a percek egy-egy kétjegyű számot tartalmaznak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha délelőtt 10 és 11 óra között valaki ránéz egy ilyen órára, akkor két relatív prím kétjegyű számot lát.

9. Marci szeret az autók rendszámában különböző matematikai összefüggéseket felfedezni. (A rendszámok Magyarországon három betűből és az azokat követő három számjegyből állnak.) Az egyik általa kedvelt típusnak a „prímes” nevet adta: az ilyen rendszámoknál a PRM betűket követő három számjegy szorzata prímszám.



a) Hány különböző „prímes” rendszám készíthető?

10. a) Igazolja, hogy bármely hat egymást követő természetes szám szorzata osztható 45-tel!

b) Igaz-e, hogy bármely öt egymást követő páratlan természetes szám szorzata osztható 45-tel? (Válaszát indokolja!) c) Hány olyan megoldása van a $45 = 3 + 5 + a + b + c$ egyenletnek, amelyben a, b és c különböző páratlan természetes számok, és $5 < a < b < c$ is teljesül?

11.

Legyen a H alaphalmaz a pozitív egészekből álló számpárok halmaza, az A , B és C pedig a H alábbi részhalmazai:

$A = \{(a; b) \mid a \text{ és } b \text{ relatív prímek}\};$

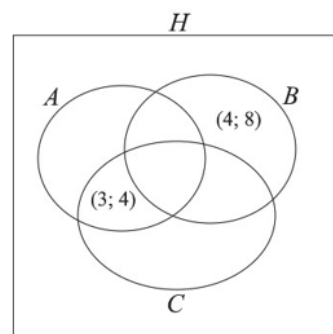
$B = \{(a; b) \mid a \text{ osztója } b\text{-nek}\};$

$C = \{(a; b) \mid a \text{ és } b \text{ közül legalább az egyik prímszám}\}.$

(Ha $a \neq b$, akkor az $(a; b)$ és a $(b; a)$ számpárokat különbözőnek tekintjük.)

a) Az alábbi Venn-diagram két részébe beírtunk egy-egy számpárt.

Írjon a diagram további hat üres részébe egy-egy megfelelő számpárt!



Tekintsük a következő két állítást (a , b , c pozitív egészek)!

I. Ha c osztója ab -nek, akkor c osztója a -nak vagy c osztója b -nek.

II. Ha a osztója c -nek és b osztója c -nek, akkor ab osztója c -nek.

b) Határozza meg a két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!

c) Fogalmazza meg az I. állítás megfordítását, és határozza meg a megfordítás logikai értékét! Ha a megfordítás igaz, akkor bizonyítsa be, ha pedig hamis, akkor mutasson ellenpéldát!

12. Oldja meg az egyenletet, ha x és y pozitív egész számok: $\frac{x}{8} = \frac{1,5}{y}$

II.

13. Írja fel a 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és a 8-as számjegyeket tartalmazza!

14. Mely n természetes számok esetén lesz a következő kifejezés értéke természetes szám?

a) $\frac{2n+10}{n+1}$

b) $\frac{3n+5}{n-5}$

15. Hány olyan x, y számpár van, amelyekre teljesül, hogy $(x, y) = 5$ és $x + y = 200$

16. Adottak a következő számok: $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4$ és $b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 13$. Írja fel a és b legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! Az eredményt elegendő prímtényezős alakban megadni.

17. Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Ha egy szám osztható 36-tal, akkor osztható 12-vel is. Írja le az állítás megfordítását is. Az igaz vagy hamis?

18. Egy 28 fős diákcsoport autóbusszal 7 napos táborozásra indul. A szállás megrendeléséhez szükséges hatjegyű telefonszám utolsó számjegye elmosódott a papíron, így csak az első öt jegyet tudták biztosan: 24375. A csoport egyik tagja arra biztosan emlékezett, hogy a hatjegyű szám osztható volt hattal. Melyik számjegy állhat az utolsó helyen?

19. Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyi értéken?

20. A 72-nek és az n pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27 720. Határozza meg az n lehetséges értékeinek számát, és adja meg az n legkisebb lehetséges értékét!

21. Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőeknek.)

22. b) Határozza meg az összes olyan pozitív egész k számot, amelyre $\log_3 k 729$ kifejezés értéke pozitív egész szám!

23. Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható?

24. Két pozitív egész szám relatív prím, legkisebb közös többszörösük 35 700. Határozza meg az ilyen tulajdonságú számpárok számát! (Az (a, b) és (b, a) számpárokat nem tekintjük különbözőeknek.) b) Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Hány olyan részhalmaza van H -nak, amelyben az elemek szorzata osztható 9-cel? (Egyelemű halmaz esetén az „elemek szorzatának” az egyetlen elem értékét tekintjük.)

25. a) Melyik az a legnagyobb természetes szám, amelyre a következő négy tulajdonságból pontosan három teljesül?

(1) Húszjegyű.

(2) 20-szal osztható.

(3) Számjegyeinek összege 20.

(4) Számjegyeinek szorzata 20.

Legyen a H alaphalmaz a húszjegyű pozitív egész számok halmaza, az A halmaz pedig a 7-es számjegyet tartalmazó húszjegyű pozitív egész számok halmaza.

b) Melyik a nagyobb: $|A|$ vagy $|\overline{A}|$?

III.

26. Az A és B helységek közötti távolság egyharmad részét egy kerékpáros 40 perc alatt, a hátralevő utat pedig másfél óra alatt tette meg. Km/h-ban vett sebessége mindkét szakaszon egész szám volt, melyek legkisebb közös többszöröse 144. Milyen távol van az A helység B -től?

27. Egy 12000 Ft-os nyomtatót leértékeltek néhány százalékkal. Kis idő múlva újra leértékeltek valahány százalékkal. Mindkét leértékelés során a leértékelés százalékos mértéke pozitív egész egyjegyű szám volt. A második leértékelés után a nyomtató ára 10602 Ft volt. Hány százalékkal értékelték le először és hány százalékkal másodszor a nyomtatót?

28. Van-e olyan p prím, amelyre a) $4p^2 - 1$ b) $5p^2 - 2$ prímszám?

29. Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén

a) $3|n^3 - n$,

b) $5|n^5 - 5n^3 + 4n$,

c) $120|n^5 - 5n^3 + 4n$

30. Melyek azok a tízes számrendszerben kétjegyű természetes számok, amelyekben a számjegyek számtani és harmonikus közepének a különbsége 1?

31. Egy szabályos n -szögről tudjuk, hogy a belső szögei fokban mérve egész számok. Hányféle lehet az n értéke?

32. a) Határozza meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{1c28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye p , további számjegyei pedig rendre q , r és s .)

b) Igazolja, hogy nincs olyan n pozitív egész szám, amelyre $4^n + 6n - 1$ osztható 8-cal!

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy $4^n + 6n - 1$ minden n pozitív egész szám esetén osztható 9-cel!

33. Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő?

34. A szókereső mobiltelefonos játékban a megtalált szó hossza (vagyis a szót alkotó betűk száma) határozza meg a játékosnak adott pontszámot. Egybetűs szóért nem jár pont, kétbetűs szóért 1 pont jár. Ha $n \geq 3$, akkor az n betűből álló szó megtalálásáért $\frac{n^2 - 5n + 10}{2}$ pontot kap a játékos.

Igazolja, hogy ha m tetszőleges természetes szám, akkor a játékos kaphat $2 + \frac{m(m+1)}{2}$ pontot!

(A leírt játékszabály nem korlátozza a szavak hosszát, ezért feltehetjük, hogy tetszőleges hosszúságú „szó” létezik.)

35. Hány olyan 1000-nél kisebb p pozitív egész szám van, amelyre a p és a 42 relatív prímek?

A következő táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk. A fehér, illetve szürke színű „L alakú” sávokban lévő számok összege:

$$L_1 = 1,$$

$$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8,$$

$$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27, \dots$$

b) Igazolja, hogy $L_n = n^3$.

c) Igazolja, hogy az első n pozitív köbszám összege $K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
...										...

36. A 2, 4, 6, 8, 10 számok felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második. Az így kapott szorzatokat összeadjuk.

a) Számítsa ki ezt az összeget!

Legyen k tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész szám. Jelölje S_k azt az összeget, amelyet a következő eljárással kapunk: az 1, 2, 3, ..., k számok (az első k db pozitív egész szám) felhasználásával az összes lehetséges módon képezzük azokat a kéttényezős szorzatokat, amelyekben az első tényező kisebb, mint a második, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

b) Igazolja, hogy $S_{k+1} = S_k + \frac{k(k+1)^2}{2}$

c) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy tetszőleges egynél nagyobb n egész

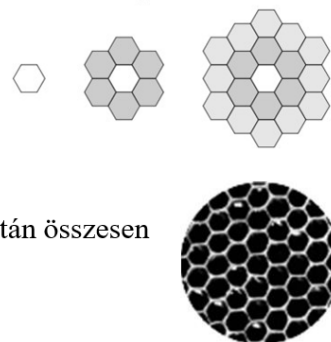
esetén $S_n = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$.

37.

A méhek (megközelítőleg) szabályos hatszög alakú sejtekből építik fel a lépet. Az építkezés első „lépése” után 1, a második lépése után 7, a harmadik lépése után 19 sejt készült már el összesen. Az első három lépést szemlélteti az alábbi ábra.

Tegyük fel, hogy az ábra szerint vázolt „körkörös” stratégia szerint építkeznek tovább a méhek, azaz minden egyes további lépésben újabb szabályos hatszög alakú sejtekkel veszik körül az előzőleg már elkészült építményt. Így a harmadik lépéstől kezdve minden egyes lépésben 6-tal több új szabályos hatszöget építenek meg, mint az előző lépésben.

b) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy az n -edik lépés után összesen $3n^2 - 3n + 1$ darab hatszög készült el!



38.

Egy háromszög oldalainak hossza $p^2 + q^2$, $p^2 - q^2$, illetve $2pq$, ahol p és q olyan pozitív egész számok, melyekre $p > q$ teljesül.

Jelölje a háromszögbe írt kör sugarának hosszát r . Igazolja, hogy r értéke egész szám!

XI. Szöveges feladatok

52-56.	74-77.	46-50.			
--------	--------	--------	--	--	--

I.

1. András reggel 9 órakor elindult kerékpárral, hogy a városban lakó nagymamáját meglátogassa. Állandó 20 km/h sebességgel haladt, s másfél órát töltött a nagyinál. Visszafelé – ugyancsak állandó sebességgel haladva – már sietett haza, sebességét 10%-kal növelve 14.42-kor ért haza. Milyen távol lakik a nagymama?

2. Arany ékszerek készítésekor az aranyat mindig ötvözik valamilyen másik fémmel. A karát az aranyötvözet finomsági fokát jelöli. Egy aranyötvözet 1 karátos, ha az ötvözet teljes tömegének $\frac{1}{24}$ része arany, a k karátos aranyötvözet tömegének pedig $\frac{k}{24}$ része arany. Kata örökölt a nagymamájától egy 17 grammos, 18 karátos aranyláncot. Ebből két darab 14 karátos karikagyűrűt szeretne csináltatni. Legfeljebb hány gramm lehet a két gyűrű együttes tömege, ha aranytartalmuk összesen sem több, mint az aranylánc aranytartalma?

3. Egy cég egyik részlegében dolgozó férfiak átlagéletkora 44 év, az ott dolgozó nők átlagéletkora 40 év, a részleg összes dolgozójáé pedig 41,5 év.

a) Hányszorosa a férfiak száma a nők számának ebben a részlegben?

A cég egy másik részlegében a férfiak és a nők számának aránya 2:3. Egy átszervezés alkalmával innen 7 férfit és 9 nőt áthelyeztek. Így a részlegben maradó férfiak és nők számának aránya 1: 2-re változott.

b) Hány férfi és hány nő maradt ezen a részlegen?

4. Ha az A0-s papírlapot a hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Ha az A1-es papírlapot a hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A2-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-ös papírlapokat. A leggyakrabban

használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os”. A „80 g-os” jelzés azt jelenti, hogy 1 m² területű másolópapír tömege 80 gramm.

Egy csomagban 500 darab A4-es, „80 g-os” papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g?

5. Egy színházban a jegyek az I., a II. vagy a III. árkategóriába tartoznak. Az egyik esti előadásra összesen 200 jegyet adtak el. Az eladott jegyek között a III. árkategóriájúak száma a másik két árkategóriába tartozó jegyek együttes számának kétharmada, az I., illetve II. árkategóriájú jegyek számának aránya pedig 9:11 volt. Hány jegyet adtak el az egyes árkategóriákban?

6. Ez a 8 ember lifttel szeretne feljutni egy épület legfelső emeletére, ahol a baráti társaság rendezvényét tartják. A kisméretű lift ajtaján ez a felirat áll: „Max. 3 személy vagy 230 kg” (vagyis a liftben nem utazhat 3-nál több személy, továbbá a liftben utazók tömegének összege nem lehet több 230 kg-nál). Igazolja, hogy a lift három fordulója már elegendő ahhoz, hogy (az előírás betartásával) mind a 8 ember lifttel mehessen fel a rendezvény helyszínére!

név	Albert	Bori	Csaba	Dénes	Elek	Frigyes	Gabi	Helga
tömeg (kg)	82	74	90	88	85	85	63	71

7. Hány olyan különböző hegyesszögű háromszög van, melynek szögei fokban mérve különböző egész számok, és a szögek egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha nem hasonlók egymáshoz.)

8. Egy egyesületi összejeövetel társaságához 5 nő és 4 férfi csatlakozott, így a nők aránya a korábbi 25%-ról 36%-ra nőtt. Hány főből állt az eredeti társaság?

9. Van egy részvénytársaságunk, amely 6600 Ft-os és 4800 Ft-os névértékű részvényeket tartalmaz. A részvényeink névértékének összege 131 400 Ft. Ha a 4800 Ft-os névértékű részvényeink harmadát 6600 Ft-osra cserélnénk, akkor a névértékek összege 140 400 Ft-ra növekedne. a) Hány darab részvényünk van az egyes fajtákból?

II.

10. A Szegedről Budapestre közlekedő vonat hétfőn Cegléd és Budapest között pályaépítési munkálatok miatt harmadára volt kénytelen csökkenteni az addigi átlagsebességét. Hétfőn a Cegléd-től számított 19 km-es szakaszon újra a régi átlagsebességével mehetett, viszont utána Budapestig megint harmad akkora lehetett csak a vonat átlagsebessége. Így hétfőn 30 perccel többet késett, mint a hétfőn. Mekkora a vonat eredeti átlagsebessége km/h-ban?

11. Egy gimnázium alapítványának kuratóriuma úgy döntött, hogy elindít egy lottójátékot, amelynek bevételeiből bizonyos részt a nyereményekre, bizonyos részt jótékonyági célokra fordít. Ebben a játékban heti rendszerességgel az első 40 pozitív egész számból húznak ki véletlenszerűen négyet. András a következő módon választja ki azokat a számokat, amelyeket megjátsszik ezen a lottón: az első két szám kiválasztása után harmadiknak az első két szám összegét, negyediknek pedig az első három szám összegét választja. a) Legfeljebb mekkorának választhatja András a legkisebb számot? b) Ha András a legkisebb számot a lehető legnagyobb választja meg, akkor melyik számok szerepelhetnek a helyesen kitöltött szelvényen?

12. Dani vásárolt egy nagyon nagy akváriumot, és 100 darab apró halat telepített bele. A telepítés és a gondozás jól sikerült, minden hónapban 20%-kal nőtt az állomány. Dani minden második hónap végén eladta a halainak mindig ugyanannyi százalékát. A 24. hónap végén az akváriumában 252 darab hal maradt. Kéthavonta az állomány hány százalékát adta el Dani?

13. Melyek azok az N kétjegyű pozitív egész számok, amelyekre a következő négy állítás közül pontosan kettő igaz és kettő hamis: az N osztható 7-tel, az N a 29 többszöröse, az $N + 11$ négyzetszám, az $N - 13$ négyzetszám.

14. Az edzőtáborba összesen 10 lány és 9 fiú érkezett meg. Az első foglalkozáson az edző mindenkit megkérdezett, hogy hány társát ismerte korábban a csoportból. (Az ismeretség kölcsönös.) Tudjuk, hogy korábban mindegyik fiú pontosan ugyanannyi lányt ismert, viszont a lányok mindannyian különböző számú fiút ismertek. Lehet-e, hogy minden fiú 6 lányt ismert korábban a tábor kezdetekor?

15. A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 20%-kal több elektromos energiát, viszont 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. A B program 30%-kal kevesebb elektromos energiát és 25%-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a C program. Mindhárom program futtatásakor 40 Ft-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az A programmal 151 Ft-ba, a B programmal 140 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül a C programmal egy mosogatás?

16. Egy a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, a német és a francia. Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:

- (1) Minden diák tanul legalább két idegen nyelvet.
- (2) Az angolt is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanulók számával.
- (3) Angolul 27-en tanulnak.
- (4) A németet is és franciát is tanulók száma 15.

17. Egy kávéforgalmazó cég kétfajta kávéból készíti a keverékeit. Ha az A típusú kávéból 20 kg-ot és a B típusúból 30 kg-ot kevernek össze, a keverék egységára kilogrammonként 1860 Ft lesz. Ha az A típusú kávéból 30 kg-ot, a B típusúból 20 kg-ot kevernek össze, akkor a keverékegységára 1740 Ft lesz.

- a) Mennyi az A, illetve B típusú kávék kilogrammonkénti egységára?
- b) 60 kg 2000 Ft egységárú keveréket akarnak előállítani. Hány kilogrammot keverjenek bele az A, illetve a B típusú kávéból?

18. A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztnéve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen. A család tagjairól még a következőket tudjuk:

- csak Bea és Barbara jár teniszezni is és kerékpározni is;
 - egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem;
 - Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani – sikertelenül.
- A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak?

19. Egy zöldség-gyümölcs kiskereskedő a nagybani piacon hétfőn 165 kg sárgabarackot, kedden 165 kg őszibarackot vásárolt. Egy rekesznyi őszibarack 2 kg-mal kisebb tömegű, mint egy rekesznyi sárgabarack, ezért 8 rekesszel több volt az őszibarack, mint a sárga. Hány kilogramm sárgabarack volt egy-egy rekeszben, és hány rekesszel vásárolt ebből hétfőn a kiskereskedő? (Hétfőn minden rekeszben ugyanannyi kg sárgabarack, kedden minden rekeszben ugyanannyi kg őszibarack volt.)

20. Egy pénzügyintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$ -os kamattal számol ($p > 0$), ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n = H \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q = 1 + \frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészleteket (ez a hitel futamideje). Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2% -os?

21. A repülőgépek üzemanyagfogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950000)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5 580 km.

Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v - 502200 + \frac{265050000}{v}$ kg lesz ($v > 0$).

22. Két várost egy 195 km hosszú vasútvonal köt össze. Ezen a vonalon személyvonattal is és gyorsvonattal is el lehet jutni egyik városból a másikba. A személyvonat átlagsebessége 18 km/h-val kisebb a gyorsvonaténál, menetideje így 45 perccel több. Határozza meg a vonatok átlagsebességét!

23. Ágoston osztálya kétnapos kirándulásra indul. Kulcsosházban szállnak meg egy éjszakára. A tanulók szállásdíja a résztvevők számától független, rögzített összeg. Az egy tanulóra jutó szállásköltség egy hiányzó esetén 120 Ft-tal, két hiányzó esetén pedig 250 Ft-tal lenne több, mint ha az egész osztály részt venne a kiránduláson. Határozza meg az osztály létszámát és a teljes fizetendő szállásdíjat!

24. Egy étteremben (hatósági engedély birtokában) az érvényes általános forgalmi adótól (áfa) kismértékben eltérő adókulcsok alkalmazásának hatását vizsgálták az ételek és italok fogyasztására nézve. Az ételek esetében 4%, az italok esetében 30% áfát adtak hozzá a nettó árhoz, és az így kapott bruttó árat kellett a vendégnek kifizetnie. A kísérlet első napján az új számítógépes program hibája miatt a számlán éppen fordítva adták a nettó árakhoz az áfát: az ételek nettó árához 30%-ot, az italok nettó árához pedig 4%-ot számoltak hozzá, és ez a számlán is így, hibásan jelent meg. Egy család ebben a vendéglőben ebédelt, és a hibás program miatt 8710 Ft-os számlát kapott. A hibát észrevették, így végül a helyes összeget, 7670 Ft-ot kellett kifizetniük.

a) Hány forint volt az elfogyasztott ételek, és hány forint volt az elfogyasztott italok helyes bruttó ára?

Egy másik étteremben 12 és 14 óra között 3900 Ft befizetéséért annyit eszik és iszik a vendég, amennyit szeretne. A befizetendő összeget egy előzetes felmérés alapján állapították meg. A felmérés során minden vendég esetén összeadták az elfogyasztott étel és ital árát az adott fogyasztáshoz tartozó összes egyéb költséggel. Az összesített költségek alapján osztályokba sorolták a vendégeket aszerint, hogy az étteremnek hány forintjába kerültek. A következő táblázat mutatja a felmérés eredményét. A táblázat első sorában az osztályközepek láthatók.

fejenként ennyi Ft-ba került az étteremnek	1000	1900	2800	3600	4400	5200
a vendégek ennyi %-a	10	20	25	30	10	5

b) A felmérés eredményét felhasználva számítsa ki, hogy ennek az étteremnek 1000 vendég esetén mekkora a várható haszna!

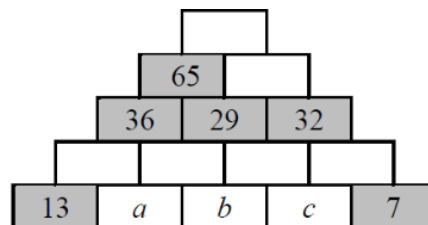
25. Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek).

A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készítettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát,

és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérnál drágább, de 455 tallérnál olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.

Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnék a vonaljegyek árát?

26. A rejtvényűjságok egyik kedvelt feladattípusa a számpiramis. Az előírás szerint a számpiramis üres mezőibe pozitív egész számokat kell írni úgy, hogy az egymás mellé kerülő számok összege megegyezzen a föléljük írt számmal. Az ábrán látható számpiramisban a 13, 7, 36, 29, 32 és a 65 kezdőszámok adottak. a) Számítsa ki a, b és c értékét!



Egy iskolának 510 tanulója van. Év végén a fiúk p százaléka, a lányok $p + 3$ százaléka lett kitűnő, így 13 fiú és 20 lány kitűnő tanuló van. Határozza meg a fiúk és a lányok számát ebben az iskolában

III.

27. Egy áruházban egy mosóport négyféle kiszerelésben árúsítanak. Az első kiszerelés 50%-kal drágább a harmadiknál, és 20%-kal kevesebb mosópor van benne, mint a másodikban. A második 50%-kal több mosóport tartalmaz, mint a harmadik, és 25%-kal többbe kerül, mint az első.

a) Az első három kiszerelés közül melyikben a legalacsonyabb a mosópor egységára?

A negyedik fajta kiszerelést úgy állították össze, hogy annak dobozán a feltüntetett egységár megegyezett az első három kiszerelés átlagos egységárával.

b) Ha a legolcsóbb kiszerelésű dobozon 600 Ft egységárat tüntettek fel, akkor hány forint egységár szerepel a negyedik fajta dobozon?

28. A 12. a osztály öt belépőjegyet kapott a vízilabda bajnokság döntőjére. A döntő után az öt tanuló a következőképpen számolt be a mérkőzésről:

A: A vesztes csapat 4-nél több gólt dobott.

B: A győztes csapat 3-mal többször talált a kapuba, mint a vesztes.

C: Összesen 10-nél több, de 28-nál kevesebb gól született a mérkőzésen.

D: A két csapat együttesen dobott góljainak a száma prímszám.

E: A vesztes csapat is prímszámú gólt dobott.

Tudjuk, hogy mind az öt tanuló igazat mondott. Megállapítható-e ezek alapján egyértelműen, hogy mi lett a döntő végeredménye?

29. Egy város sportklubjának 640 fős tagságát felnőttek és diákok alkotják. A tagság 55%-a sportol rendszeresen. A rendszeresen sportoló tagok számának és a sportklub teljes taglétszámának az aránya $11/8$ -szor akkora, mint a rendszeresen sportoló felnőttek számának aránya a felnőtt klubtagok számához viszonyítva. A rendszeresen sportolók aránya a felnőtt tagságban fele akkora, mint amekkora ez az arány a diákok között. Hány felnőtt és hány diák tagja van ennek a sportklubnak?

30. A nyomda egy plakátot 14400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán

felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos. Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségnek az összege, ha a 14400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak?

31. Karcsi meglátott a kirakatban egy igen kedvező árú sportcipőt. Bement, hogy megvásárolja, de legnagyobb megdöbbenésére a pénztárnál a kirakatban látott ár négyszeresét akarták fizettetni vele. Mikor panaszt tett, kiderült, hogy a kirakatrendező a cipő árát jelző négyjegyű szám számjegyeit véletlenül fordított sorrendben írta ki. Mennyibe került a sportcipő?

32. Egy játékban minden játékos ugyanakkora kezdőpontszámmal indult, amely érték a játék fordulói során növekedhetett vagy csökkenhetett. Rita és Péter jól játszottak, mert mindketten folyamatosan nyertek, így növekedett a pontszámuk. Érdekes módon Rita pontszáma fordulóról fordulóra ugyanannyiszorosára nőtt, és ez igaz volt Péterre is, bár Péter esetében nagyobb volt a növekedés mértéke. Az első forduló után Péternek 20-szal több pontja volt, mint Ritának, a második után már 70 ponttal vezetett Rita előtt, a harmadik forduló után pedig már 185 pont volt a különbség a javára. Mekkora volt a közös kezdőpontszám értéke?

33. Éva egy 7×7 -es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat 1. tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.) Péter minden sorból kiválaszt egy-egy számot úgy, hogy semelyik kettő se legyen egy oszlopban. Igazolja, hogy akárhogyan is választja ki Péter így a számokat, a hét szám összege minden esetben ugyanannyi lesz!

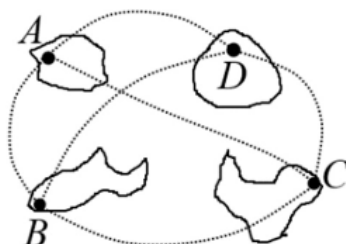
		91				
				11		

34. A pozitív páratlan számokat „háromszög” alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is). a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99? b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot! c) Igazolja, hogy az n -edik oszlopban álló számok összege n^3 ($n \in \mathbb{Z}^+$)

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

35. Az Óceán Légitársaságnak a megalakulása óta alapelve, hogy a szigetvilágban működő hálózatának bármely két célállomása között működtet repülőjáratot. (Az ábra azt a több évvel ezelőtti időszakot szemlélteti, amikor még csak négy célállomás és hat repülőjárat volt.) A hálózatot folyamatosan bővítik: az utóbbi két év alatt a célállomások száma másfélszeresére nőtt, ugyanezen idő alatt a repülőjáratok száma pedig 60-nal lett több.

b) Hány célállomásra közlekednek jelenleg?



XII. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

			18-23.	27., 40-47.	
--	--	--	--------	-------------	--

I.

1. Adja meg az α valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x^2 - 4(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot x + 1 + \sin \alpha = 0$ egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke legyen!
2. a) $2 \sin^2 x + 3 \sin x = 5$ b) $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0,5$ c) $\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\operatorname{tg}(3x - 20^\circ) = \sqrt{3}$
3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet! $\sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$
4. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! $2 \sin x - 2 \sin^2 x = \cos^2 x$
5. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet! $\sin x - \cos^2 x = 1$
6. Oldja meg a $[-\pi; \pi]$ halmazon a $2 \sin^2 x - \cos x = 2$ egyenletet!
7. Oldja meg a következő két egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! a) $\cos x \geq \frac{1}{2}$
8. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenleteket! $\frac{1}{4} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{8} = 0$
9. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán! $\sin^2 x = 3 \cos^2 x$
10. $4 \sin^2 x - 16 \cos^2 x = -1$
11. Oldjuk meg a valós számok halmazán: $|2 \sin^2 x + 7 \sin x + 1| = 5$

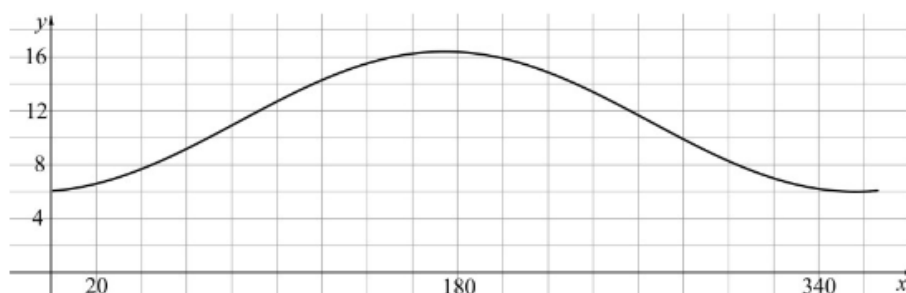
II.

12. Igazolja, hogy ha egy háromszög szögeire érvényes az összefüggés:
 $\sin \alpha : \sin \beta = \cos(\alpha + \gamma) : \cos(\beta + \gamma)$, akkor a háromszög egyenlőszárú vagy derékszögű!
13. Jelölje H a $[0, 2\pi[$ intervallumot. Legyen A a H azon x elemeinek halmaza, amelyekre teljesül a $2^{\sin x} > 1$ egyenlőtlenség, és B a H halmaz azon részhalmaza, amelynek x elemeire teljesül $2^{\cos x} < 1$ egyenlőtlenség. Adja meg az A halmazt, a B halmazt és az $A \setminus B$ halmazt!
14. Igazolja, hogy a következő egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán: $\sin x - 1 = \sqrt{\lg(\cos^2 x - 1,5 \cos x)}$
15. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok,
továbbá $x > 0, x \neq 1$ és $y > 0, y \neq 1$.
$$\left. \begin{array}{l} \log_x y + \log_y x = 2 \\ \sin(2x + 3y) + \sin(4x + y) = 1 \end{array} \right\}$$
16. $\frac{\sin x + \sin 2x}{1 + 2 \cos x} = 1$ $2 \cos 2x + \sin x = 1$ $2 \sin^2 x + 3 \sin x > 2$ $2 \sin x + \frac{1}{\cos x} = 2 \operatorname{tg} x + 1$

$$\frac{\operatorname{ctgx}}{\sin x} = 2\sqrt{3} \quad \sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \cos^2 x \quad \operatorname{ctgx} = 2 \cos x$$

$$1 = \cos^2 x + 2 \sin x \quad \operatorname{tg}^2 x + 4 \sin^2 x - 3 = 0$$

17. Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő f függvénnyel lehet modellezni: $f(n) = -5,2 \cos\left(\frac{n+2}{58}\right) + 11,2$, ahol n az adott nap sorszámát jelöli egy adott évben belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva ($1 \leq n \leq 365$, $n \in \mathbb{N}$). Az ábra a $g: [1; 365] \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = -5,2 \cos\left(\frac{n+2}{58}\right) + 11,2$ függvényt szemlélteti. (A g függvény az f -nek egy folytonos kiterjesztése.)



- Ha $x = 1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$. Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve!
- Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal! Válaszát óra:perc formátumban, egész percre kerekítve adja meg!
- Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb!

III.

18. Oldja meg a valós számok halmazán az egyenletet!

$$\sqrt{\sin^2 x - 4 \sin x + 4} + \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 4} = \sqrt{\sin^2 x + 7 \sin x + 12,25}$$

19. Hány $(x; y)$ rendezett valós számpár megoldása van az egyenletrendszernek, ha x és y is a $[0; 2\pi]$ zárt intervallum elemei?

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \cdot \cos y = 0 \\ \sin x + \sin^2 y = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

20. Vizsgáljuk azt a sorozatot, amelynek n -edik tagja adott $a \in \mathbb{R}$ esetén $a_n = n + \sin(n\alpha)$. Milyen $\alpha \in [0; 2\pi]$ esetén lesznek az a_1, a_2, a_3 számok – ebben a sorrendben – egy konstans sorozattól különböző számtani sorozat szomszédos tagjai? A megoldásában használhatja a következő azonosságokat is:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

21. Hány megoldása van a $[0; 2\pi]$ intervallumban a következő egyenletnek: $\operatorname{tg} 2x = \sin 4x$

22. $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0$

XIII. Kombinatorika

		69-77.	72.		
--	--	--------	-----	--	--

I.

1. Egy szabályos játékkocka két oldalára 0-át, két oldalára 2-est, két oldalára 4-est írunk. A dobókockát ötször egymás után feldobjuk, és a dobások eredményét rendre feljegyezzük. a) Hányféle számötöst jegyezhetünk fel? b) Hányféle számötös esetében lehet a dobott pontok összege 10?
2. A Pécsre közlekedő vonat első osztályú fülkéjében hatan utaznak egy tudományos konferenciára. A vonat indulása után kiderül, hogy a hat ember között van kettő, aki mindenkit ismer az utitársak közül, a többiek pontosan négy-négy utitársat ismernek régebbiről. (Az ismeretségek kölcsönösek.) A hat utitárs három kétágyas szobában nyer elhelyezést. Hányféle szobabeosztást lehet készíteni a hat utitársnak, ha a szobák között nem teszünk különbséget?
3. Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent levők közül. Hány különböző sorrendben húzhatjuk ki az 5 golyót, ha a kihúzott golyót nem tesszük vissza, és az azonos színű golyók nem különböztethetők meg egymástól?
4. Csaba az első hat számkártya felhasználásával (1, 2, 3, 4, 5, 6) két háromjegyű számot készített. Hívjunk egy ilyen számpárt duónak. (Például egy lehetséges duó: „415 ; 362”.) A hat számból több ilyen duót lehet készíteni. Két duót egyenlőnek tekintünk, ha ugyanaz a két különböző háromjegyű szám alkotja. Például a „415 ; 362” és a „362 ; 415” duó egyenlők, de a „362 ; 145” már egy másik duó. Hány különböző duót lehet a hat számkártyából elkészíteni?
5. Hány olyan tízjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye a $\{0 ; 8\}$ halmaz eleme?
6. Hatjegyű pozitív egész számokat képezünk úgy, hogy a képzett számban szereplő számjegy annyiszor fordul elő, amekkora a számjegy. Hány ilyen hatjegyű szám képezhető?
7. Egy 28 fős osztály 4 tagú küldöttséget választ az iskolai diákszékből. a) Hányféleképpen választhatják ki a küldöttség tagjait? b) Az osztályban 12 fiú és 16 lány jár. Hányféleképpen választhatják ki a küldöttség tagjait, ha azt akarják, hogy 2 fiú és 2 lány legyen a küldöttségben? c) Kiderült, hogy a 4 tagú küldöttségnek kell, hogy legyen egy vezetője. Ekkor hányféleképpen választhatják ki (nemre való tekintet nélkül) a küldöttség tagjait?
8. Egy városi állatkertben a 4 ragadozót (egy nőstény tigris, egy oroszlánt, egy leopárdot és egy jaguárt) 8 egymás melletti ketrecben helyezték el. Hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat a 8 ketrecben?
9. Ágoston a tanév első két hónapjában három osztályzatot szerzett matematikából (osztályzatok: 1, 2, 3, 4 vagy 5). A második osztályzata nem volt rosszabb, mint az első, a harmadik osztályzata pedig nem volt rosszabb, mint a második. Határozza meg a feltételeknek megfelelő lehetőségek (számhármások) számát!
10. Jelöljük meg egy szabályos tizenkétszög A_1 csúcsát! Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik csúcsa az A_1 , a másik két csúcsa pedig szintén a tizenkétszög valamelyik két csúcsával azonos? (Két háromszöget akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyik csúcsuk különböző.)

11. Kinga a következő tanítási napra hat házi feladatot kapott, három kötelezőt és három szorgalmi. Egy-egy kötelező házi feladatot kapott matematikából, angolból és magyarból, ezeket biztosan elkészíti. Szorgalmi házi feladatot biológiából, németből és történelemből kapott, ezeket nem feltétlenül csinálja meg: lehet, hogy mind a hármat elkészíti, lehet, hogy csak kettőt vagy egyet, de az is lehet, hogy egyet sem készít el.

a) Összesen hányféle különböző sorrendben készítheti el Kinga a házi feladatait?

(Két esetet különbözőnek tekintünk, ha vagy nem ugyanazokat a házi feladatokat, vagy ugyanazokat a házi feladatokat, de más sorrendben oldja meg.)

Kinga matematika-házifeladata ez volt: „Ötszáz különböző pozitív egész szám átlaga 1000. Legfeljebb mekkora lehet a számok közül a legnagyobb?”

b) Adja meg Kinga matematika házi feladatának megoldását!

Kinga, Linda, Misi és Nándi elvállalta, hogy az alacsonyabb évfolyamok tanulói közül hét diákot rendszeresen korrepetálni fog. Az egyéneként vállalt tanulók számát egy megbeszélésen döntik el.

c) Hány különböző módon állapodhatnak meg abban, hogy melyikük hány tanulót korrepetáljon, ha mindegyikük vállal legalább egy tanulót? (Két megállapodást különbözőnek tekintünk, ha legalább egyikük nem ugyanannyi tanulót korrepetál a két megállapodás szerint.)

12. Egy telephely K, L, M, N, O, P, Q épületei közül az éjszakai első ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr. Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha a K és L épületeket mindenképpen ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőrzi a biztonsági őr.)

13. Az ABCD konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontják. Ezeket pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos háromszög különböző színű legyen, de az egymással szemben fekvők azonos színűek is lehetnek. (Két háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.) b) Hány olyan különböző színezés lehetséges, amelyhez pontosan 3 színt használunk?

14.

A 2022. július 1-jétől Magyarországon kiadott gépjárműrendszámok formátuma a következő:



- Összetétele: 4 betű a latin ábécéből, majd 3 számjegy.
(A latin ábécé 26 betűből áll, melyek közül 5 magánhangzó és 21 mássalhangzó.)
- Az első két betűből vagy mindkettő magánhangzó, vagy mindkettő mássalhangzó, de az első betűpár nem lehet CS, GY, LY, NY, SZ, TY, ZS.
- A harmadik és negyedik betű tetszőleges lehet.
- A három számjegy mindegyike tetszőleges lehet, de 000-ra nem végződhet rendszám.

Hány különböző, a fenti szabályok mindegyikének megfelelő rendszám készíthető?

15. Egy építőjáték olyan (kockától különböző) egybevágó négyzetes oszlopokat tartalmaz, amelyeknek minden lapja vagy kékre, vagy sárgára van festve. Mindegyik oszlopon több sárga színű lap van, mint kék színű. Az építőjáték a feltételnek megfelelő minden különböző színezésű oszlopból egy darabot tartalmaz.

a) Hány négyzetes oszlop van az építőjátékban? (Két színezett oszlop különböző, ha térbeli mozgatással nem vihetők át egymásba.)

II.

16. Adott az $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaz. a) Adja meg az A halmaz háromelemű részhalmazainak a számát! b) Az A halmaz elemeiből hány olyan öttel osztható hatjegyű szám írható fel, amelyben a számjegyek nem ismétlődhetnek? c) Az A halmaz elemeiből hány olyan hatjegyű szám írható fel, amely legalább egy egyest tartalmaz?

17. Egy középiskola 12. osztályának egyik csoportjában minden tanuló olyan matematika dolgozatot írt, amelyben 100 pont volt az elérhető maximális pontszám. A csoport eredményéről a következőket tudjuk: 5 tanuló maximális pontot kapott a dolgozatára, minden tanuló elért legalább 60 pontot, és a dolgozatok pontátlaga 76 pont volt. Minden tanuló egész pontszámmal értékelt dolgozatot írt. A 14 fős csoportból Annának, Baláznak, Csabának, Dorkának és Editnek lett 100 pontos a dolgozata. Pontosan hatan írtak 60 pontos dolgozatot, és csak egy olyan tanuló volt, akinek a pontszáma megegyezett az átlagpontszámmal. Hányféleképpen valósulhatott ez meg? (A csoport két eredményét akkor tekintjük különbözőnek, ha a csoport legalább egy tanulójának különböző a dolgozatra kapott pontszáma a két esetben.)

18. Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kell érvényesíteni, amelyen egy 3×3 -as négyzetben 1–9-ig szerepelnek a számok. A jegy érvényesítésekor a jegykezelőautomata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki. Rajzolja le az összes olyan lyukasztást, amelyben minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kilyukasztott mező van! Indokolja, hogy miért ezek és csak ezek a lehetséges lyukasztások! (Jelölje egyértelműen, hogy melyik ábrája próbálkozás és melyik tartozik a válaszhoz! Nem annyi sablon van, ahány lehetséges lyukasztás.)

19. Bence, Kati, Pali és Zoli asztaliteniszben körmérkőzést akarnak játszani. (A körmérkőzés azt jelenti, hogy mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést játszik.) Az első este csak három mérkőzést játszanak le. Hányféle lehet a három mérkőzésben a játékosok párosítása, ha tudjuk, hogy négyük közül pontosan két játékos két-két mérkőzést játszott?

20. a) Hány hatjegyű számot lehet készíteni a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek többször is felhasználhatók? b) A fenti hatjegyűszámok között hány különböző számjegyekből álló, öttel osztható szám van? c) A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan hatjegyű számot képezhetünk, amelyben legalább egy számjegy ismétlődik? (Legalább egy számjegy legalább kétszer fordul elő.)

21. Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra mondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos. Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság?

22. Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szült. A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnévük közül semelyik kettőnem kerül egymás mellé?

23. Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak, és mindenkinek 1-1 fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is. Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel?

24. Két gyerek mindegyike 240 forintért vett kaparós sorsjegyet. Fémpénzzel fizettek (5; 10; 20; 50; 100 és 200 forintos érmékkel), és pontosan kiszámolták a fizetendő összeget. Hányféleképpen fizethetett Miki, ha ő 4 darab érmével fizetett, és hányféleképpen fizethet Karcsi, ha ő 5 darab érmével fizetett? (A pénzérmék átadási sorrendjét nem vesszük figyelembe.)

25. Egy kerek dobozban piros, egy másik, ugyanilyen dobozban pedig kék címkéjű csomagolt sajtok vannak. A 6-6 egyforma méretű, egymástól nem megkülönböztethető sajt szelet teljesen kitölti az egyes dobozokat. A dobozok tartalmát kiöntjük az asztalra. Hány különböző elrendezésben tehetünk vissza ebből a 12 darab sajtból 6 darabot az egyik dobozba címkéjükkel felfelé? (Két elrendezést különbözőnek tekintünk, ha azok forgatással nem vihetők egymásba.)

26. A készletben az építőelemek kék vagy piros színűek. Péter 8 ilyen elemet egymásra rak úgy, hogy több piros színű van köztük, mint kék. Lehet, hogy csak az egyik színt használja, de lehet, hogy mindkettőt. Hányféle különböző színösszeállítású 8 emeletes tornyot tud építeni?

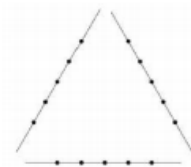
27. Egy városi állatkertben a 4 ragadozót (egy nőstény tigris, egy oroszlánt, egy leopárdot és egy jaguárt) 8 egymás melletti ketrecben helyezték el. b) Az állatgondozók azt tapasztalták, hogy ha két ragadozó szomszédos ketrecbe kerül, akkor azok rendkívül agresszívek válnak. Hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat a 8 ketrecben úgy, hogy szomszédos ketrecekbe ne kerüljenek állatok? c) A jaguárt elszállították, és hoztak helyébe egy hím tigris. Annak érdekében, hogy a nőstény és a hím tigris „közeledjenek” egymáshoz, e két tigris szomszédos ketrecbe akarták elhelyezni. Ekkor hányféleképpen helyezhették el a ragadozókat, ha a két tigris szomszédos ketrecbe került, de ezen kívül ne legyenek szomszédos ragadozók?

28. András húga, Kati 6 éves. András 6 szál virágot akar venni neki egy virágboltban. E 6 szál virágot egy kartonlapra sorban egymás mellé ragasztva akarja átadni Katinak. Ha elkészítenénk minden lehetséges módon a kartonpapírokat, és véletlenszerűen kiválasztanánk egyet közülük, mekkora annak a valószínűsége, hogy azon lennének azonos fajta virágok?

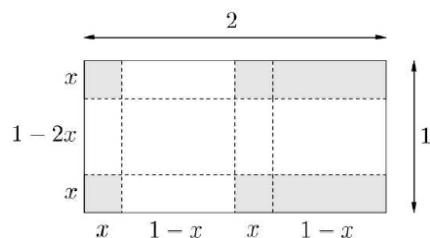
29. Egy iskolák közötti vetélkedőn 10 iskola vett részt iskolánként egy-egy 3 fős csapattal. A 10 csapat között volt 4 budapesti és 6 vidéki. a) Hányféleképpen alakulhatott a végső sorrend, ha tudjuk, hogy az első és az utolsó helyezett is budapesti csapat volt. b) A 10 csapat egy-egy képviselője verseny előtt felsorakozott egy fotózáshoz. Hányféleképpen állhatott egy vonalba ez a 10 diák, ha a sor két szélén két-két budapesti, diák állt? c) A verseny három nyertes csapata ajándékba kapott 3-3 színházjegyet. Hányféleképpen ülhetett le a 9 diák egymás mellé, ha a csapattársak egymás mellett ültek?

30. Hányféleképpen lehet 6 nőből és 3 férfiből három munkacsoportot szervezni úgy, hogy mindegyik csoportba 2 nő és 1 férfi kerüljön? (A három munkacsoport sorrendjétől eltekintünk.)

31. Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint. Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül?



32. A dobozokat egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (például 7WA3A egy lehetséges kód). Hány különböző kód lehetséges?



33. Éva egy 7×7 -es táblázat bal felső mezőjétől kezdve, balról jobbra haladva, sorról sorra beírta egy számtani sorozat első 49 tagját úgy, hogy a tagok sorrendjét nem változtatta meg. (A sorozat első tagja a bal felső sarokba került, a 8. tag a második sor első mezőjébe, a 49. tag pedig a jobb alsó sarokban áll.)

Péter a táblázat minden sorából kiválasztja a számtani sorozat egy-egy tagját úgy, hogy a hét kiválasztott szám közül semelyik kettő ne legyen egy oszlopban. c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a 91 és a 11 is a Péter által kiválasztott számok között lesz!

	91					
			11			

34. A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérkőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszből döntetlen nincs.) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak?

35. Egy kis boltban három különböző ízesítésű csokoládé kapható: epres, málnás és narancsos. Ha összesen öt tábla csokoládét akarunk ebben a boltban vásárolni, és csak az ízesítéseket vesszük figyelembe, akkor hány különböző lehetőségünk van?

36. A 11. b osztály a következő tanévre nyolc kötelező olvasmányt kapott. Ezek közül kettő ugyanannak a szerzőnek a munkája, a többi szerzőnek csak egy-egy könyve van az olvasmányok között. Andi még nyáron szeretne elolvasni a nyolc könyv közül hármat. A nyarat a nagyszüleinél tölti, ezért a kiválasztott három könyvet magával viszi.

a) Hányféleképpen választhatja ki Andi, hogy melyik három könyvet vigye magával, ha azt szeretné, hogy a három könyv három különböző szerző műve legyen?

Az osztály tanulói közül hatan: Andi, Barbara, Csilla, Dani, Elek és Feri moziba mennek.

b) Hányféleképpen ülhetnek le hat egymás melletti székre úgy, hogy semelyik két lány ne üljön egymás mellett?

37. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával leírtuk az összes, különböző számjegyekből álló négyjegyű számot. Hány olyan van ezek között, amelyben a számjegyek összege 15?

38. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata és összege is 12?

39. 1852-ben egy londoni diák az Anglia megyéit ábrázoló térkép színezése közben úgy találta, hogy a megyék „helyes” színezéséhez legfeljebb négy színre van szükség. (Helyes színezés esetén a közös határszakasszal rendelkező megyék különböző színűek.) A diák sejtésének általánosítása tetszőleges térképek esetére (négy szín-tétel) sokáig megoldatlan matematikai probléma volt. A térképrészleten Tolna megye és négy megyeszomszédja látható. Az öt megyét legfeljebb négy színnel színezzük ki (piros, sárga, kék és zöld). Hányféleképpen színezheto helyesen ez a térképrészlet? (Két színezés különböző, ha van legalább egy megye, melynek a két színezésben más a színe.)



40. Lali vesz még egy lekváros palacsintát 210 Ft-ért. Lali zsebében 100, 50, 20, 10 és 5 Ft-os érmék vannak, mindegyikből több is. Ezek közül 6 érmét választ ki.

a) Igazolja, hogy 6 érmével három különböző módon fizethető ki 210 Ft! (Két fizetést különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik címletű érméből eltérő számút használunk fel a két fizetés során.)

b) Hányféle sorrendben vehet elő Lali 6 olyan érmét a zsebéből, amelyek összege 210 Ft, ha egyesével húzza elő őket? (Az azonos címletű érméket nem különböztetjük meg egymástól.)

41. Egy téglalapot hat tartományra osztottak fel az ábrán látható módon. Az A, B, C, D, E, F

tartományokat úgy kell kiszínezni, hogy azonos színű tartományok ne érintkezzenek egymással. A színezéshez a piros, kék, zöld és sárga színek használhatók. (Mindegyik tartományt ki kell színezni a megadott színek egyikével, de nem kötelező mind a négy színt felhasználni.)

Hányféleképpen színezhető ki a téglalap úgy, hogy

az A és C tartományok színe különböző legyen?

A	B	C
D		E
		F

42. Hányféleképpen választhatunk ki egy téglatest csúcsai közül hármat úgy, hogy a kiválasztott három csúcs által meghatározott sík ne tartalmazzon a téglatest egyetlen további csúcsát sem?

43. Három lány és négy fiú moziba megy. Egy sorba szól a jegyük, hét egymás melletti székre.

a) Hányféle sorrendben ülhetnek le, ha két lány nem ülhet egymás mellé?

A nézőtéren az első és a második sorban már csak 3-3 szabad ülőhely van. A második sor szabad ülései pontosan az első sor szabad ülései mögött vannak.

b) Hányféleképpen tud leülni egy hatfős társaság a hat szabad helyre úgy, hogy a második sorban mindenki magasabb legyen a közvetlenül előtte ülőnél? (A hat személy magassága különböző.)

III.

44. Annának a facebookon 40 ismerőse van. (Ebben a feladatban minden ismeretséget kölcsönösnek tekintünk.) Anna ismerőseinek mindegyike Anna többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer. A szóba került 41 ember között összesen hány ismeretség áll fenn?

45. Egy egyetem természettudományi karának tanévzáró ünnepségén 6 doktorandusz hallgató, valamint egy biológia professzor, egy fizika professzor és egy matematika professzor kapott díjat kimagasló kutatói tevékenységéért. Számukra az első sorban helyeztek el 9 széket. Az ünnepségre a professzorok együtt érkeztek, megelőzve a hallgatókat. a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a professzorok a 9 üres széken, ha nem várnák meg a hallgatókat?

A professzorok azonban megvárták a hallgatókat. Mikor a hallgatók mindegyike megérkezett az ünnepségre, a professzorok azt kérték, hogy mindegyikük két hallgató között ülhessen. A hallgatók örömmel tettek eleget a kérésnek. b) Hányféleképpen ülhetett le így a 9 díjazott?

46. Öt egyetemista: Bence, Kati, Márti, Pali és Zoli nyáron munkát szeretne vállalni egy üdülőhelyen. A helyi újságban több megfelelőnek látszó munkahelyet is találtak, mégpedig a következőket: három éttermet, amelyekbe csak fiúkat, két fodrászatot, amelyekbe csak lányokat vesznek fel és két fagyizót, amelyekbe viszont alkalmaznak fiúkat és lányokat is. (Egyik munkahelyen sincs létszámkorlátozás.)

a) Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha mind az öten egymástól függetlenül döntenek az állásokról, és minden fiatal csak egy állást vállal? (Az azonos típusú munkahelyeket is megkülönböztetjük.) b) Hányféleképpen helyezkedhet el az öt fiatal, ha a 2 lány nem akar ugyanazon a munkahelyen dolgozni, és a 3 fiú közül is bármelyik kettő különböző munkahelyre szeretne menni?

47. Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A házigazda mindenkivel beszélt. Az azonos nemzetiségű vendégek egymást nem hívták, de a többiekkel mind beszéltek telefonon. Senki sem beszélt egy másik emberrel egynél többször, és minden beszélgetés pontosan két ember között zajlott. Hány telefonbeszélgetést bonyolított le egymás között a 8 matematikus csütörtökön?

48. Egy középiskolai évfolyam kézilabda házibajnokságán az A, B, C, D, E és F osztály egy-egy csapattal vett részt.

a) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és valamilyen sorrendben az A és a B osztály végzett az első két helyen, a D osztály pedig nem lett utolsó?

b) Hányféle sorrendben végezhettek az osztályok a bajnokságon, ha tudjuk, hogy holtverseny nem volt, és az E osztály megelőzte az F osztályt?

A bajnokságon mindenki mindenkivel egyszer játszott, a győzelemért 2, a döntetlenért 1, a vereségért 0 pont járt. Végül az osztályok sorrendje A, B, C, D, E, F lett, az elért pontszámaik pedig rendre 8, 7, 6, 5, 4 és 0. Tudjuk, hogy a mérkőzéseknek éppen a harmada végződött döntetlenre, és a második helyezett B osztály legyőzte a bajnok A osztályt.

c) Mutassa meg, hogy a B és a D osztály közötti mérkőzés döntetlenre végződött!

49. Adott két párhuzamos egyenes, e és f. Kijelölünk e-n 5, f-en pedig 4 különböző pontot. Hány (e-től és f-től is különböző) egyenest határoz meg ez a 9 pont? Hány olyan háromszög van, amelynek mindhárom csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki? Hány olyan négyszög van, amelynek mindegyik csúcsa a megadott 9 pont közül kerül ki?

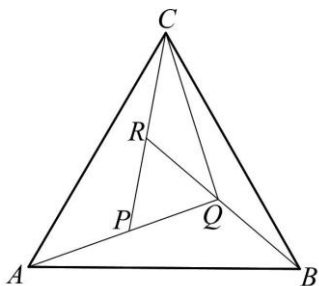
50. Négy házaspár moziba ment; a 8 jegyet egymás mellé vették. a) Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha azt akarják, hogy a házaspárok egymás mellett üljenek? b) Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha azt akarják, hogy a 4 férj, ill. a négy feleség üljön egymás mellett?

51. a) Az ABC háromszög oldalai: 10, 12 és 15 cm hosszúak. Az oldalakon (az oldalak végpontjait kivéve) minden egész cm helyen egy pontot helyeztünk el. Ez után képeztük az összes olyan háromszöget, melynek csúcspontjai a kijelölt pontok közül való. Hány db ilyen háromszöget képezhetünk? b) Az PQR szabályos háromszög oldalai n cm hosszúak, ahol $n > 2$ pozitív egész szám. Az oldalakon (az oldalak végpontjait kivéve) minden egész cm helyen egy pontot helyeztünk el. Ez után képeztük az összes olyan háromszöget, melynek csúcspontjai a kijelölt pontok közül valók, majd képeztük az összes olyan négyszöget, melynek két csúcsa egy oldalon, másik két csúcsa pedig a másik, illetve a harmadik oldalon van a kijelölt pontok közül. Miből van több: háromszögből vagy négyszögből?

52. Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4 pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha a, b, c, d pozitív számok, és $a + c = b + d$, akkor az a, b, c, d hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.)

53. Az ABCDE konvex ötszög csúcsait piros, kék vagy zöld színűre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsa különböző színű legyen. Hány különböző színezés lehetséges? (Az ötszög csúcsait megkülönböztetjük egymástól.)

54. A piros, kék, zöld és sárga színek közül három szín felhasználásával úgy színezzük ki az ábrán látható ABQ, BCQ, CQR, ACP és PQR háromszögek belsejét, hogy a közös határszakasszal rendelkező háromszögek különböző színűek legyenek. (Egy-egy háromszög színezéséhez csak egy-egy színt használunk.) Összesen hány különböző színezés lehetséges?



55. A lift felújításakor a liftben együtt utazók megengedett össztömegét 300 kg-ra növelik, de a személyek számára vonatkozó korlátozás megmarad (legfeljebb 3 fő utazhat együtt). Az új előírás figyelembevételével hányféleképpen mehetne fel a baráti társaság 8 tagja a lifttel, ha minden fordulóban legalább két személy utazna együtt? (Két „feljutást” különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csoport összetétele nem azonos a két feljutásban, vagy a csoportok más sorrendben jutottak fel a legfelső emeletre.)

név	Albert	Bori	Csaba	Dénes	Elek	Frigyes	Gabi	Helga
tömeg (kg)	82	74	90	88	85	85	63	71

56. Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg. A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van, amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem?

XIV. Valószínűségszámítás (A)

			69-79.		
--	--	--	--------	--	--

I.

- Hét szabályos pénzérmét egyszerre feldobtunk, és feljegyeztük a fejek és írások számát. a) Mekkora a valószínűsége, hogy több fejet dobtunk, mint írást? b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának különbsége nagyobb háromnál?
- Tegyük fel, hogy a lakosság 34%-a dohányos. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az országban 10 találomra kiválasztott felnőtt közül egy sem dohányos!
- A könyvkiadó szerkesztője egy könyv nyomtatási formáját tervezi. Minden lap alsó, felső és külső szélén kettő centiméteres margót szeretne hagyni, a belső szélén a kötés miatt négy centiméterest. A teljes lap területe 600 cm^2 . A nyomtatott oldalak száma 120, és a nyomtatott oldalak számozása 3-mal kezdődik. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy nyomtatott oldalt, mekkora valószínűséggel lesz az oldalszámban 2-es számjegy?
- A főiskolások műveltségi vetélkedőjén négy ötfős csapat indult. A vetélkedő után az induló csapatok tagjai között három egyforma értékű könyvutalványt sorsolnak ki (mindenki legfeljebb egy utalványt nyerhet). Mekkora a valószínűsége annak, hogy az utalványokat három olyan főiskolás nyeri, akik mindhárman más-más csapat tagjai?

5. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk, és a kapott számokat a dobás sorrendjében beírjuk a 8a567b hatjegyű számban az a és a b helyére. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott hatjegyű szám minden számjegye különböző?

6. Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy. Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet?

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10.000.000
40	50.000
800	10.000
150.000	1.000
400.000	500
1.000.000	200
3.449.156	0

7. A BKV megfigyelései alapján az utasoknak kb. 8%-a bliccel, azaz érvényes jegy vagy bérlet nélkül utazik a járatokon. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy buszon, amelyen 24-en utaznak, a jegyellenőr nem talál bliccelőt?

8. Egy iskola alapítványi bálján a korábban szokásos tombolahúzás helyett egy egyszerű lottóhúzást szerveznek. A szelvényt vásárolóknak az első tíz pozitív egész szám közül kell ötöt megjelölniük. Húzáskor öt számot sorsolnak ki (az egyszer már kihúzott számokat nem teszik vissza). Egy lottószelvény 200 Ft-ba kerül. Egy telitalálatos szelvénnel 5000 Ft értékű, egy négytalálatos szelvénnel 1000 Ft értékű, az alapítvány által vásárolt könyvtalványt lehet nyerni. Négynél kevesebb találatot elérő szelvénnel nem lehet nyerni semmit.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a legkisebb kihúzott szám a 3.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a számokat növekvő sorrendben húzzák ki?

Az a) és b) kérdésekre adott válaszait három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

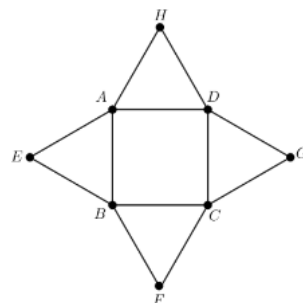
9. A 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan négyjegyű páros szám képezhető, melynek minden számjegye különböző?

10. Járványos időszakban egy nagyváros lakóinak 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Ebben az időszakban a város lakói közül 80-an ugyanazon az autóbuszon utaznak. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az autóbusz 80 utasa között van legalább egy fertőzött? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

11. A H halmaz az első 90 pozitív egész szám halmaza. H-ból véletlenszerűen kiválasztunk két különböző számot. b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott szám egy derékszögű háromszög (fokban mért) valamelyik két szöge!

12. Tekintsük az ábrán látható nyolcpontú gráfot.

b) A gráfban véletlenszerűen kiválasztunk két csúcsot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két csúcsot él köti össze a gráfban?



13. Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.) Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni.
b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a hátralevő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja!

14. Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a másodiknak dobott szám éppen a másik két dobott szám átlaga?

15. Egy dobozban 3 piros és 7 kék golyó található. Kihúzzunk a dobozból egymás után **két** golyót úgy, hogy az elsőként kihúzott golyót a húzás után **nem tesszük vissza**. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kihúzott két golyó között lesz piros!

16. Balázs pontosan 4 tojásból szeretne rántottát készíteni magának. Van 6 tojás a hűtőben, amelyek közül 5 jó és 1 romlott (záp), de ezt ő nem tudja. Balázs sietősen, egymás után üti bele a tojásokat egy tálba. Ha 4 jó tojás kerül a tálba, akkor már készülhet is a rántotta, ha azonban két vagy három jó tojás után a romlott tojás kerül a tálba, akkor sajnos nem sikerül Balázs terve. (Ha romlott tojást üt a tálba, akkor azt Balázs rögtön észreveszi, és az egészet kiönti. Ám ha ekkor még maradt legalább 4 tojás a hűtőben, akkor újra nekilát a rántotta készítésének.) Számítsa ki, mennyi a valószínűsége annak, hogy Balázs elkészítheti a négytojásos rántottát!

II.

17. Egy egyetem természettudományi karának tanévzáró ünnepségén 6 doktorandusz hallgató, valamint egy biológia professzor, egy fizika professzor és egy matematika professzor kapott díjat kimagasló kutatói tevékenységéért. Számukra az elsősorban helyeztek el 9 széket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a biológia professzor másodikként veheti át a díjat úgy, hogy közvetlenül előtte is, utána is doktorandusz hallgatót szólítanak a díj átvételére, és az ünnepségen a díjak átadásánál minden egyes sorrend egyenlő valószínűséggel valósul meg?

18. Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent levők közül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó (ötödik) húzás előtt az urnában egy darab fehér golyó marad?

19. Egy nagyvárosban a helyi járatokon olyan buszjegyet kell érvényesíteni, amelyen egy 3x3-as négyzetben 1-től 9-ig szerepelnek a számok. A jegy érvényesítésekor a jegykezelőautomata a kilenc mezőből mindig pontosan hármat lyukaszt ki. Két kisiskolás a buszra várakozva beszélget. Áron azt mondja, hogy szeretné, ha a buszjegyen kilyukasztott három szám mindegyike prím lenne. Zita pedig azt reméli, hogy a számok összege 13 lesz. Mekkora valószínűséggel teljesül Áron, illetve Zita kívánsága?

20. Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt. A 8 ember úgy ül le, hogy azonos betűvel kezdődő keresztnévűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a ilyen ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű?

21. Egy matematikus három német és négy magyar matematikust hívott vendégségbe szombat délutánra. Csütörtökön a házigazda és a 7 meghívott közül néhányan telefonon egyeztettek. A telefonbeszélgetés során minden meghívott vendég megmondta, hogy mekkora valószínűséggel megy el a szombati vendégségbe. Mindannyian ugyanazt a valószínűséget mondták. A házigazda tudta, hogy a meghívottak egymástól függetlenül döntenek arról, hogy eljönnek-e. Kiszámolta, hogy 0,028 annak

a valószínűsége, hogy mindannyian eljönnek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy meghívott elmegy a vendégségbe? (Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

22. Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványából fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József. A táblázat az mutatja, hogy mennyi könyvet adtak el az egyes boltokban.

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János	119	90	72	281
Márai Sándor	119	126	117	362
József Attila	170	216	27	413
Összesen	408	432	216	

A könyvkiadó a három üzletében minden eladott könyvhöz ad egy sorsjegyet. Ezek a sorsjegyek egy közös sorsoláson vesznek részt negyedévenként. A vizsgált időszakban azok a sorsjegyek vesznek részt a sorsoláson, amelyeket a fenti három szerző műveinek vásárlói kaptak. Két darab 50 ezer forintos könyvutalványt sorsolnak ki köztük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időszak sorsolásán mind a két nyertes sorsjegyet Márai Sándor egy-egy könyvéhez adták, és mindkét könyvet a 2. üzletben vásárolták? Válaszát három tizedesjegyet pontossággal adja meg!

23. Felmérések szerint az internetes kapcsolattal rendelkezők 17%-a vásárol az interneten, 33%-a tölt le szoftvert az internetről. A statisztika szerint az internetezők 14%-a mindkét szolgáltatást igénybe veszi. Mennyi a valószínűsége a következő eseményeknek?

a) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy nem vásárol az interneten.

b) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy vásárol az interneten, vagy szoftvert tölt le. (Megengedve, hogy esetleg mindkét szolgáltatást igénybe veszi.)

c) Egy véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy nem vásárol az interneten és szoftvert sem tölt le az internetről.

d) Három véletlenszerűen kiválasztott internetes kapcsolattal rendelkező személy közül egyik sem vásárol az interneten. (A kiválasztást visszatevéses módszerrel végzik el.)

24. Egy 32 fős érettségiző osztály tanulói három különböző táncot mutatnak be a szalagavató bálon. A következő táblázat az egyes táncokban fellépő diákok számát mutatja nemenkénti bontásban.

	Keringő	Kán-kán	Hip-hop	Egyik sem
Lány	9	6	10	2
Fiú	9	0	4	2

Van 2 olyan lány, aki mindhárom táncban fellép, ugyanakkor nincs olyan fiú az osztályban, aki egynél több produkcióban részt venne. a) A lányok közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy mindketten táncolnak a kán-kánban? b) Az osztály tanulói közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető pontosan két táncban szerepel?

25. a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét: A: a dobott pontok összege prím; B: a dobott pontok összege osztható 3-mal.

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni?

26. Egy dobozban öt piros golyó van. a) Hány fehér golyót kell a dobozba tennünk, ha ezt akarjuk, hogy ezután a dobozból a golyók közül egyet véletlenszerűen kihúzva (a golyók kihúzásának valószínűsége megegyezik) a kihúzott golyó 0,25 valószínűséggel piros legyen? b) Legalább hány fehér és hány fekete golyót kell a dobozba tennünk (mindegyikből legalább egyet-egyet), ha azt akarjuk, hogy ezután a dobozból a golyók közül egyet véletlenszerűen kihúzva, a kihúzott golyó 0,25 valószínűséggel ne fekete legyen?

27. András, Béla és Csaba kockáztak. Három különböző színű kockával dobtak: pirossal, késsel és zölddel. A játékot az nyeri, aki a legtöbb pontot (vagyis a kockákkal dobott pontok összegét) dobja, de a piros kocka pontértéke duplán számít.

a) Először András dobott, pontértéke 19. Eztán Béla következett; ő 21 pontot dobott. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Béla nyeri a játékot?

b) A következő kört Csaba nyerte 7 ponttal. Béla lett a harmadik 4 ponttal. Hányféleképpen alakulhatott András dobása?

c) Melyik dobásnak nagyobb a valószínűsége: annak, hogy 9-et dobunk vagy annak, hogy 19-et dobunk?

28. Egy iskola alapítványi bálján a korábban szokásos tombolahúzás helyett egy egyszerű lottóhúzást szerveznek. A szelvényt vásárolóknak az első tíz pozitív egész szám közül kell ötöt megjelölniük. Húzáskor öt számot sorsolnak ki (az egyszer már kihúzott számokat nem teszik vissza). Egy lottószelvény 200 Ft-ba kerül. Egy telitalálatos szelvénnel 5000 Ft értékű, egy négytalálatos szelvénnel 1000 Ft értékű, az alapítvány által vásárolt könyvtulványt lehet nyerni. Négynél kevesebb találatot elérő szelvénnel nem lehet nyerni semmit. Számolással igazolja, hogy a telitalálat valószínűsége (három tizedesjegyre kerekítve) 0,004, a négyes találat valószínűsége pedig 0,099.

29. Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körüjárás irányban rendre A, B, C, D és E.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk 4 húrt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek a húrok egy konvex négyszöget alkotnak?

b) Hányféleképpen juthatunk el a húrok mentén A-ból C-be, ha a B, D és E pontok mindegyikén legfeljebb egyszer haladhatunk át? (Az A pontot csak az út kezdetén, a C pontot csak az út végén érinthetjük.)

30. Egy 16 pontú teljes gráf összes élét úgy színeztük ki pirossal vagy sárgával, hogy minden pontból pontosan három piros él induljon ki. A pontok közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott két pontot piros él köti össze?

31. Az ulti nevű kártyajátékot magyar kártyával játsszák, melyben 4 szín (piros, tök, makk, zöld) és minden színben 8 lap (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász), összesen tehát 32 lap van. Dénes, Elemér és Fanni ultiznak: egy osztásnál mindhárom játékos (véletlenszerű elosztással) 10-10 lapot kap, a maradék 2 lap pedig az úgynevezett talonba kerül. Számítással igazolja, hogy (négy tizedesjegyre kerekítve) 0,7966 annak a valószínűsége, hogy az osztáskor Fanni kap legalább egy ászt!

32. A cég ügyfélszolgálatának hosszú időszakra vonatkozó adataiból az derült ki, hogy átlagosan minden nyolcvanadik vásárló tér vissza később valamilyen minőségi kifogással. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 100 vásárló közül legfeljebb kettőnek lesz később minőségi kifogása!

33. Három lány és n fiú véletlenszerű elrendezésben leül egy sorba. Határozza meg n értékét, ha $\frac{1}{26}$ annak a valószínűsége, hogy a három lány egymás mellett ül!

34. Egy számtani sorozat első tagja 4, differenciája 5. Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa 2. Az 1000-nél kisebb pozitív egészek közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mekkora a valószínűsége, hogy olyan számot választottunk, amely tagja valamelyik sorozatnak? Válaszát $\frac{p}{q}$ alakban adja meg úgy, hogy p és q pozitív egészek és relatív prímek legyenek!

35. Egy használt laptop-akkumulátorokat árusító üzletben a 25 azonos típusú akkumulátor töltéskapacitása 60% és 80% között van, de közülük csak 10-nek kisebb a töltéskapacitása 70%-nál. Egy vevő a 25 akkumulátor közül hármat vásárol meg. Ha a három akkumulátort véletlenszerűen választja ki, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb az egyiknek lesz 70%-nál kisebb a töltéskapacitása?

36. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve Blanka, Csenge és Dóri feladata az volt, hogy különböző figurákat hajtogassanak színes papírból. Összesen 70 figurát hajtogattak. A figurák kétheted részét Dóri készítette, a maradékot pedig fele-fele arányban Blanka és Csenge.

a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a 70 figura közül véletlenszerűen kiválasztott két figurát ugyanaz a lány készítette!

A Blanka által készített figurák 40%-a volt karácsonyfa, a Csenge által készített figuráknak 60%-a, a Dóri által készített figuráknak pedig 30%-a. Az első vásárló a vásáron Blanka édesanyja volt; ő megvett egy véletlenszerűen kiválasztott karácsonyfa-figurát.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a figurát éppen Blanka készítette!

37. Az A, B, C, D, E, F kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az A vagy a B cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?

38. A római katonák az úgynevezett taxillus-szal játszottak „kockajátékot”. (A taxillus a kecske vagy a juh térdkalácsából faragott csontocska; ld. a képen.) Dobás után egy taxillus négy különböző oldalára eshetett. Jelölje ezt a négy különböző helyzetet A, B, C és D. Az egyes dobáskimenetek nem voltak egyformán valószínűek: az A, illetve a B helyzet egyaránt $\frac{4}{10}$, a C, illetve a D helyzet pedig egyaránt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel következett be. A rómaiak általában négy taxillust dobtak fel egyszerre. A Venus-dobás volt az egyik legértékesebb, ekkor a négy csontocska mindegyike más-más oldalára esett.



a) Mennyi a Venus-dobás valószínűsége?

b) A következő két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége?

I. Négy feldobott taxillus között lesz olyan, amelyik C helyzetben érkezik le.

II. Négy feldobott taxillus között pontosan egy érkezik le az A helyzetben.

39. Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja szabályos háromoldalú gúla. A tetraéderrel 1-est, 2-est, 3-ast vagy 4-est lehet dobni (a dobás eredményének az alsó lapon lévő számot tekintjük). Az 1-es, a 2-es, illetve a 3-as dobásának valószínűsége egyenlő. A 4-es dobásának valószínűsége ötször akkora, mint az 1-es dobásé. Ha a bűvész a két dobótetraédert egyszerre dobja fel, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 6 lesz?

40. Az évfolyamdolgozat egyik feladatában öt feleletválasztós kérdésben kellett négy-négy válaszlehetőség közül az egyetlen helyeset kiválasztani. Amikor Domonkos elolvasta a kérdéseket, akkor látta, hogy az első két kérdésre biztosan tudja a helyes választ (ezeket be is jelöli majd). A harmadik és a negyedik kérdésnél egy-egy válaszlehetőségről, az ötödik kérdésnél pedig két válaszlehetőségről tudta biztosan, hogy azok rosszak. Ezért úgy döntött, hogy az utolsó három kérdésnél tippelni fog: véletlenszerűen választ azon válaszlehetőségek közül, amelyekről nem tudja biztosan, hogy rosszak.

b) Határozza meg Domonkos helyes válaszai számának várható értékét!

41. Minden egyes elkészült termék (egymástól függetlenül) p valószínűséggel selejtes. Egy kamion több ezer lábost szállított a megrendelőnek, melyek közül a minőségellenőrök 20-at vizsgálnak meg a szállítmány átvétele előtt. Legfeljebb mekkora lehet p értéke, ha legalább 0,8 annak a valószínűsége, hogy a 20 megvizsgált termék egyike sem selejtes?

42. András, Bori, Csaba és Dóra egy szabályos dobókockával dobnak egyet-egyet, és az nyer, aki a legnagyobb olyan számot dobta, amit a többiek nem dobtak (például 6, 6, 4, 1 dobások esetén a 4-est dobó játékos nyer). Ha nincs ilyen szám, akkor nem nyer senki. Bori 5-öst dobott, a többiek ezután fognak dobni. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Bori nyer?

43. Pali és a testvére, Lilla együtt szeretnének filmet nézni. Három film közül választanak: az egyik a Kocka, a másik A kör, a harmadik pedig a Képlet című film. Pali ezek közül az egyik filmnek 1 pontot, egy másiknak 2 pontot, a harmadiknak pedig 3 pontot ad, majd (Palitól függetlenül) ugyanezt teszi Lilla is. A két pontszámot mindegyik film esetében összeadják, majd a legkisebb pontösszegű filmet nézik meg. Ha több ilyen film is van, akkor filmnézés helyett társasjátékoznak.

b) Hányféleképpen oszthatják ki a pontokat a testvérek úgy, hogy mindhárom film pontösszege ugyanannyi legyen?

c) Ha Pali és Lilla is véletlenszerűen osztja ki a pontszámokat a filmek között, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy filmnézés lesz a pontozás eredménye?

44. Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két dobott szám szorzata 2-vel osztható lesz, de 4-gyel nem!

45. Alizék osztálytermében az egyik fal mellett három sorban 12-12, összesen 36 szekrény található a diákok számára, 1-től 36-ig megszámozva. Az osztályba 33-an járnak. Tanév elején minden diák – sorsolás útján – egy-egy szekrényt kap. Három szekrény így a sorsolás után üresen marad. Legyen az A esemény az, hogy a három üresen maradó szekrény egy sorban található, a B esemény pedig az, hogy a három üresen maradó szekrény három különböző sorban található. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége?

III.

46. Egy gimnázium alapítványának kuratóriuma úgy döntött, hogy elindít egy lottójátékot, amelynek bevételeiből bizonyos részt a nyereményekre, bizonyos részt jótékonyági célokra fordít. Ebben a játékban heti rendszerességgel az első 40 pozitív egész számból húznak ki véletlenszerűen négyet. András a következő módon választja ki azokat a számokat, amelyeket megjátsszik ezen a lottón: az első két szám kiválasztása után harmadiknak az első két szám összegét, negyediknek pedig az első három szám összegét választja. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Andrásnak telitalálat lesz, ha az egyik héten a fenti szabálynak megfelelő minden egyes számnégyest pontosan egyszer megjátsszik?

47. Annának az facebookon 40 ismerőse van. (Ebben a feladatban minden ismeretséget kölcsönösnek tekintünk.) Anna ismerőseinek mindegyike Anna többi ismerőse közül pontosan egyet nem ismer. b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna 40 ismerőse közül véletlenszerűen választva kettőt, ők ismerik egymást? c) Válasszunk most a 41 személy közül véletlenszerűen kettőt! Mennyi a valószínűsége, hogy nem ismerik egymást?

48. András edzőtáborban készül egy úszóversenyre, 20 napon át. Azt tervezte, hogy naponta 10 000 métert úszik. De az első napon a tervezettnél 10%-kal többet, a második napon pedig az előző napinál 10%-kal kevesebbet teljesített. A 3. napon ismét 10%-kal növelte az előző napi adagját, a 4. napon 10%-kal kevesebbet edzett, mint az előző napon, és így folytatta, páratlan sorszámú napon 10%-kal többet, párosan 10%-kal kevesebbet teljesített, mint a megelőző napon. Az edzőtáborozás 20 napjából véletlenszerűen választunk két szomszédos napot. Mekkora a valószínűsége, hogy András e két napon együttesen legalább 20 000 métert teljesített?

49. Egy zeneiskolában három hangszeren: zongorán, gitáron és szaxofonon lehet tanulni. Tavaly 18 tanuló iratkozott be a zeneiskolába. Közülük mindenki egy vagy két hangszeren tanult játszani, három hangszeren egyikük sem. Tizenöten tanultak zongorázni, nyolcan gitározni és heten szaxofonozni. A zeneiskola tanulói között két jegyet sorsoltak ki ugyanarra a hangversenyre úgy, hogy két diák nevét húzták ki véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy vagy mindkét kisorsolt diák szaxofonozni tanult, vagy mindketten gitározni tanultak?

50. Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak, és mindenkinek 1-1 fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A fényképeket végül figyelmetlenül rakta borítékba, bár mindenki kapott a levelében egy fényképet is. Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége: – senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt; vagy – pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel?

51. Egy szabályos érme egyik oldalán a 6-os, a másikon pedig a 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt? Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége?

52. A „bergengóc” lottóban kétszer húznak egy játéknapon. Bandi egy szelvénnel játszik, tehát az adott játéknapon mindkét húzásnál nyerhet ugyanazzal a szelvénnel.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak legalább egy telitalálata lesz, ha p annak a valószínűsége ($0 < p < 1$), hogy egy szelvényen, egy húzás esetén telitalálata lesz?

Megváltoztatták a játékszabályokat: minden játéknapon csak egyszer húznak (más játékszabály nem változott). Bandi most két (nem feltétlenül különbözően kitöltött) szelvénnel játszik.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játéknapon Bandinak telitalálata legyen valamelyik szelvényén?

d) A telitalalat szempontjából a b) vagy a c)-ben leírt játék kedvezőbb Bandi számára?

53. Egy urnában egy fehér, egy piros és egy kék golyó található. Egymás után ötször húzunk az urnából egy-egy golyót úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük. a) Mekkora a valószínűsége, hogy az öt húzás során kihúzott kék és piros golyók száma megegyezik? b) Mekkora a valószínűsége, hogy az öt húzás során több kék golyót húzunk, mint pirosat?

54. Adott két párhuzamos egyenes, e és f . Kijelölünk e -n 5, f -en pedig 4 különböző pontot. A 9 pont mindegyikét véletlenszerűen kékre vagy pirosra színezzük. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az e egyenes 5 pontja is azonos színű és az f egyenes 4 pontja is azonos színű lesz?

55. Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezzünk hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő?

56. A gyárban (ahol ezeket az építőelemeket készítik) nagyon ügyelnek a pontosságra. Egymillió építőelemből átlagosan csupán 20 selejtes. András olyan készletet szeretne vásárolni, melyre igaz a következő állítás: 0,01-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy a dobozban található építőelemek között van selejtes. Legfeljebb hány darabos készletet vásárolhat András?

57. Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld. A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

58. A tojásokat 12 db-os dobozokban árulják. Minden tojás $1/12$ valószínűséggel sérült. a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy doboz csak ép tojásokat tartalmaz? b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy doboz kettő vagy több törött tojást tartalmaz? c) A boltban tízen vesznek egy-egy doboz tojást. Mekkora az esélye, hogy közülük ketten csupa ép tojást tartalmazó dobozt visznek haza?

59. Egy urnában elhelyeztük az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyeket, majd véletlenszerűen kivettünk közülük négyet. a) A kivett 4 db számot a kivétel sorrendjében egymás mellé leírjuk. Hány db négyjegyű számot kaphatunk ilyen módon? b) A kivett 4 db számot a kivétel sorrendjében egymás mellé leírjuk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az így leírt négyjegyű szám 5-tel osztható, 5000-nél nagyobb szám? c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kivett négy db számjegy között van 2 olyan, melyek számtani közepe nem egész szám?

60. Egy verseny során András a következő feladatot kapta: elé tettek két urnát. Mindkettőben volt 4 fekete, 5 piros és 1 kék golyó. Andrásnak valamelyik urnából kellett húznia egy golyót. Ha pirosat húzott, nyert 10000 Ft-ot és tovább jutott. Ha feketét húzott, akkor kiesett. Ha az első urnát választotta és kék golyót húzott (amit húzás után nem tesznek vissza), akkor az urnában elhelyeztek még egy piros golyót és újra húzhatott ugyanabból az urnából. Ha a második urnát választotta és kék golyót húzott, (amit húzás után most sem tesznek vissza), akkor az urnából kivettek egy fekete golyót és András újra húzhatott ugyanabból az urnából. Melyik urnát válassza András?

61. Egy körvonalon felvettünk öt pontot, és behúztuk az általuk meghatározott 10 húrt. Jelölje a pontokat pozitív körjárási irányban rendre A, B, C, D és E. A 10 húr mindegyikét kiszínezzük egy-egy színnel, pirosra vagy sárgára vagy zöldre. Hány olyan színezés van, amelyben mindhárom szín előfordul?

62. Dani sportlövészedszetre jár, ahol koronglövészetet tanul. Az első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.)

b) Az első félév végén legalább hány egymás után leadott lövés kell ahhoz, hogy Dani legalább 95%-os eséllyel legalább egyszer eltalálja a repülő korongot?

A rendszeres edzéseknek köszönhetően Dani eredményessége javult. A második félév végén már 0,72 volt annak a valószínűsége, hogy három egymás után leadott lövésből pontosan egy vagy pontosan két találatot ér el.

c) Számítsa ki, hogy a második félév végén mekkora valószínűséggel ér el találatot egy lövésből Dani!

63. A biológiaórán egy kezdetben tízmilliós baktériumhalmaznak a környezethez való alkalmazkodását modellezzik a tanulók. Egy szabályos dobókockával dobnak, és ha a dobás eredménye 1, 2 vagy 3, akkor egymillió baktérium elpusztul. Ha a dobás eredménye 4 vagy 5, akkor nem történik semmi. Ha a dobás eredménye 6, akkor újabb egymillió baktérium keletkezik. A dobást többször egymás után megismétlik. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy hét dobás után a baktériumok száma legfeljebb ötmillió lesz!

64. A légitársaság vezetőségi értekezletén megállapították, hogy az 1-es számú járatukon legfeljebb 168 utasnak van hely, de minden alkalommal sokkal többen szeretnének jegyet váltani. Több év tapasztalatai szerint 0,032 annak a valószínűsége, hogy erre a járatra valaki megveszi a jegyet, de aztán valamilyen ok miatt mégsem jelenik meg a járat indulásánál. Emiatt a vezetőség úgy dönt, hogy erre a 168 fős járatra ezentúl 170 jegyet adnak el. Az érvényes szabályozás szerint a több jegy eladása miatt a járatról esetleg lemaradó utasoknak a légitársaság fejenként 600 euró kártérítést köteles fizetni. Ha a vezetőség megállapításai helyesek, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az 1-es számú járat egy indulásánál legfeljebb 168 utas jelenik meg, és mennyi a társaság által fizetendő kártérítés várható értéke a járat egy útját tekintve?

65. Anna és Balázs felváltva dobnak egy szabályos dobókockával. A játékot Anna kezdi. Az nyer, aki először dob hatost. (Az első hatosdobás után a játéknak vége van.)

- Igazolja, hogy $5/36$ annak a valószínűsége, hogy Balázs az első dobásával megnyeri a játékot!
- Határozza meg annak a valószínűségét, hogy Anna az első három dobásának valamelyikével megnyeri a játékot!
- Határozza meg annak a valószínűségét, hogy Anna nyeri a játékot!

XV. Síkgeometria

26-38., 61-79.	32-40., 56-69.	24-33., 79-90.	57-66., 81-89.		
----------------	----------------	----------------	----------------	--	--

I.

1. Az ABCDEF szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$. Számítsa ki a hatszög területének pontos értékét!

2. Egy televíziókészülék termékleírásában szereplő „16:9-es típus” azt adja meg, hogy mennyi a téglalap alakú tv-képernyő két szomszédos oldalhosszának aránya, a „40 colos” jellemző pedig a képernyő átlójának a hosszát adja meg col-ban ($1 \text{ col} \approx 2,54 \text{ cm}$). a) Számítsa ki a 40 colos, 16:9-es képernyő oldalainak hosszát! Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

3. A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap méretarányának is nevezik. Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz!

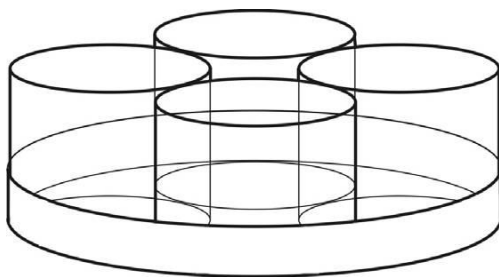
A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya $\sqrt{2}$, a területe pedig éppen 1 m^2 .

b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve!

4. A PQRS húrnégyszöget a PR és a QS átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz!

5. Az ABCD négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek.

a) Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$



Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.

b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!

6. Ha egy háromszög szabályos, akkor a körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával. Fogalmazza meg ezen (igaz) állítás megfordítását, és igazolja, hogy a megfordított állítás is igaz!

7. Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm.

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!

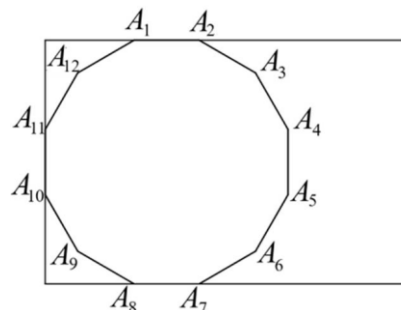
Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya 3:4:5.

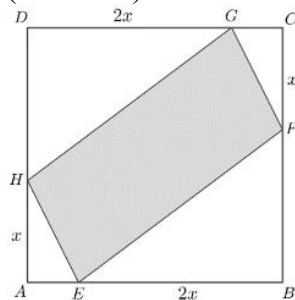
c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe $121,5 \text{ cm}^2$.

Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

8. Egy nagy méretű, köztéren felállítandó óra számlapját szabályos 12-szög alakúra tervezik. A számlapot egy $260 \text{ cm} \times 180 \text{ cm}$ -es téglalap alakú alumíniumlemezről vágják ki az ábra szerint. Mekkora tömegű az óralap, ha az alumíniumlemez vastagsága 2 mm, és 1 m^3 alumínium tömege 2700 kg?



9. Az ABCD négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az EFGH paralelogrammát írjuk. Az AH és a CF szakasz hossza x méter, a BE és a DG szakasz hossza $2x$ méter ($0 < x < 2$).



a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma területe (m^2 -ben mérve):

$$T(x) = 4x^2 - 12x + 16$$

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1,25$.

10. Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja! Ha egy háromszög két magassága egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlőszárú.

11. A társasház kertje egy 15 méter hosszú, 10 méter széles téglalap alakú földterület, amely az egyik átlója mentén ketté van osztva: az egyik fele füvesítve van, a másik felén virágágyás található. A füvesített rész derékszögű csúcsában van egy öntöző, amely egy 10 méter sugarú negyedkör alakú területet locsol a kertben. Mekkora az a füvesített terület, amelyet nem ér el az öntöző?

12. Egy egyenlőszárú háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0; 0)$, $B(82; 0)$ és $C(41; 71)$. Géza szerint ez a háromszög szabályos.

a) Határozza meg a háromszög szögeit fokban, három tizedesjegyre kerekítve!

b) Határozza meg a háromszög AC és AB oldalainak arányát négy tizedesjegyre kerekítve!

II.

13. Egy tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz alapjainak hossza 5, illetve 20 egység. Számítsa ki a trapéz területét és átlójának hosszát!

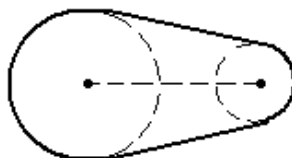
14. Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külsőnégyzet egy-egy oldalára. A belső és a külsőnégyzet oldalainak aránya 5:7. Milyen arányban osztja két részre a belsőnégyzet csúcsa a külsőnégyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg!

15. Egy körhöz a P pontból két szelőt húzunk, ezek az AB és CD húrokat metszik ki a körből. P-hez A, illetve D van közelebb. Mekkora a CD távolság, ha $PA=4$, $PB=12$ és $PD=6$ egység, és a kör középpontja 3 egység távolságra van a PB szelőtől. (körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele)

16. Az ABC háromszög két szöge: $\alpha = 62^\circ$, $\beta = 80^\circ$. A háromszög magasságai a köré írható kört az A' , B' , C' pontokban metszik. Határozza meg az $A'B'C'$ háromszög szögeit! (kerületi szögek tétele)

17. Az ABCD derékszögű trapéz párhuzamos oldalai: $AB = 24$, $CD = 18$. A merőleges AD szár A-hoz közelebbi H harmadoló pontjából a BC szár derékszögben látszik. Mekkora a trapéz területe?

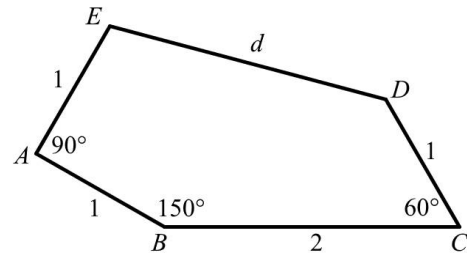
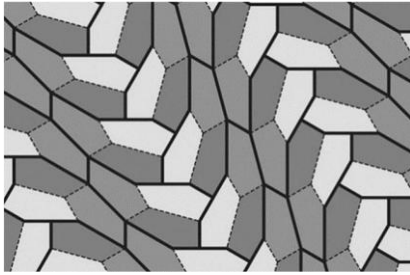
18. Egy ékszír által meghajtott két korong látható az ábrán. A nagyobbik korong sugara 4 cm, a kisebbiké 2 cm. A két korong középpontjának távolsága 8 cm. Milyen hosszú az ékszír?



19. Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög b hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a c hosszúságú átfogót és az a hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül kifejezték a kör sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával. Andrea szerint a kör sugara $R_A = \frac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P = \frac{ac-a^2}{b}$. Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes!

20. Az interneten érdekes hírként jelent meg 2015-ben, hogy a matematikusok újabb, egybevágó ötszögekből álló hézagmentes síklefedést (parkettázást) fedeztek fel. (A két ábrán a parkettázás egy részlete, illetve a parketta egyik ötszögének néhány adata látható:

$EA = AB = CD = 1$, $BC = 2$, $\angle EAB = 90^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$.)



Igazolja, hogy az ábrán megadott ötszög B csúcsából húzott két átló 75° -os szöget zár be egymással!

21. Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza $AC = 30$ egység és $BC = 40$ egység. Megrajzoljuk a derékszögű csúcsból induló magasságvonalat, szögfelezőt és súlyvonalat. Ezek metszéspontját az átfogóval jelölje rendre P, Q és R. Írja fel egész számokkal az $AP : PQ : QR : RB$ arányt! Pontos értékekkel számoljon!

22. Egy ingatlanhirdetésben sík területen fekvő legelőt kínálnak eladásra. A legelő alakja konvex négyszög, ennek csúcsait jelölje A, B, C és D. A négyszög három oldala $AB = 126$ m, $BC = 65$ m, $CD = 80$ m, két szöge $\angle ABC = 122,5^\circ$ és $\angle ADC = 90^\circ$. A legelőt 0,9 hektár területűnek hirdeti az eladó. Hány százalékkal nagyobb a legelő valódi területe a meghirdetetténél? (1 ha = 10 000 m²)

23. Az ábrán látható trapéz alakú kert alapjainak hossza: $AB = 36$ m, $CD = 8$ m. A 11 méter hosszú AC átló merőleges a trapéz alapjaira.

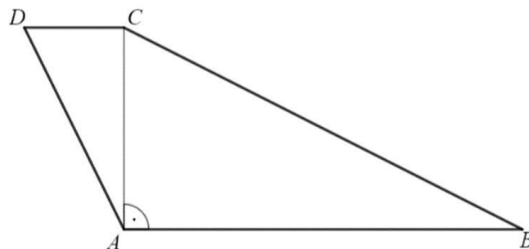
a) Mekkora a kert kerülete és területe?

A kert tulajdonosa egy 10 cm átmérőjű, henger alakú kutat fúratott a kertben.

b) Hány méter mély lett a kút, ha a térfogata 0,1 köbméter?

Az e egyenes párhuzamos a fenti ABCD trapéz alapjaival, és az AD szarat az E pontban, a BC szarat pedig az F pontban metszi. Az AC átló felezi az EF szakaszt.

c) Az A ponttól mekkora távolságra metszi az e egyenes az AC átlót?



24.

Az ABCD húrnégyszögben $AB = 15$, $BC = 10$. Az $\angle ABC$ szöget a DB átló két részre osztja: $\angle ABD = 20^\circ$, $\angle DBC = 40^\circ$.

a) Igazolja, hogy az AC átló hossza pontosan $5\sqrt{7}$!

b) Igazolja, hogy az ACD háromszög szögei 20° , 40° és 120° !

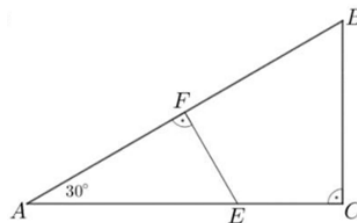
c) Számítsa ki az ABCD négyszög területét!

A KLMN deltoidban a K és az M csúcsnál derékszög van, a KM átló hossza 9,6 cm.

Az LN szimmetriaátlót az átlók metszéspontja két olyan szakaszra osztja, amelyek hosszának különbsége 2,8 cm.

d) Számítsa ki a deltoid területét!

25. A háromszög AB átfogójának F felezőpontjában merőleget állítunk az átfogóra. Ez a merőleges az AC befogót az E pontban metszi. Milyen arányban osztja két részre az E pont az AC befogót?



III.

26. Bizonyítsa be általánosan a következő állítást: ha egy húrtrapéz érintőnégyyszög, akkor magasságának hossza az alapok hosszának mértani közepe.

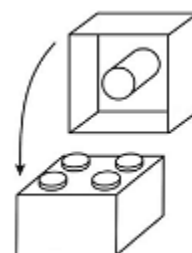
27. Jelölje $y = x^2 - 4x - 12$ egyenletű parabola tengelypontját C, az x tengellyel alkotott metszéspontjait pedig A és B. Számítsa ki az ABC háromszög beírt körének sugarát!

28. Pali és Zoli közösen egy $60 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ -es, téglalap alakú telket vásárolt. A telket egymás között két olyan egybevágó derékszögű trapézra osztották fel, amelynek a rövidebb alapja 20 m. Jelölje EF a közös határvonal szakaszt! Számítsa ki a közös EF határvonal hosszát! (Az eredményt méterben, egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

29. Egy képzőművészeti galéria új kiállítótermet nyitott gyermekek számára. A terem alakja egy négyzet lapú egyenes gúla, melynek belső méretei: az alapél 12 méter, az oldalél 10 méter. Az egyik kiállító művész azt kérte, hogy a kiállítás kivitelezője ragasszon az oldalfalakra körbe az alapélekkel párhuzamos keskeny színes csíkot (vonalat), amelyre majd a kiírásokat elhelyezik. A színes vonalak vízszintes, képzeletbeli síkja éppen felezte a kiállítóteret térfogatát. A kiállítás megnyitására a hangmérnök úgy helyezte el a terem legmagasabb pontjáról belógatott mikrofont, hogy az minden oldalfaltól és a padlótól is azonos távolságra legyen. Milyen hosszú volt a belógató vezeték, ha a mikrofon és a rögzítés méretétől eltekintünk? (Válaszait cm pontossággal adja meg!)

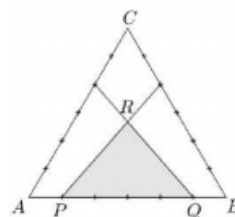
30. Egy építőkészletben a rajzon látható négyzetes hasáb alakú elem is megtalálható. Két ilyen építőelem illeszkedését az egyik elem tetején kiemelkedő négy egyforma kis henger és a másik elem alján lévő nagyobb henger szoros, érintkező kapcsolata biztosítja.

(Ez azt jelenti, hogy a hengerek tengelyére merőleges síkmetszetben a nagyobb kört érinti a négy kisebb kör, amelyek középpontjai egy négyzetet határoznak meg.) Tudjuk, hogy a kis hengerek sugara 3 mm, az egymás melletti kis hengerek tengelyének távolsága pedig 12 mm. Mekkora a nagyobb henger átmérője? Válaszát milliméterben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!



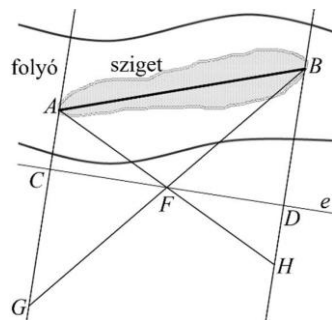
31. Egy derékszögű háromszög oldalai $a = 6 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ és $c = 10 \text{ cm}$. Megrajzoljuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét. Számítsa ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső M metszéspontja milyen messze van a derékszögű C csúctól!

32. Az egyenlő oldalú ABC háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a PQR háromszöget. Számítsa ki a PQR háromszög területének pontos értékét!



33. Thalész, a hét görög bölcs egyike, egy nevezetes, neki tulajdonított mérés során egy folyóban lévő sziget AB hosszát a folyóparton maradvá határozta meg. Először felvett egy e egyenest a parton.

Ezen az e egyenesen megkereste azt a C , illetve D pontot, amelyekben a CA , illetve a DB irány merőleges az e egyenesre. Ezután a CD szakasz F felezőpontját is megjelölte egy jelzőkaróval. Ezt követően az AC egyenesen haladva megjelölte azt a G pontot, amelyre B , F és G egy egyenesre illeszkedik; és hasonlóan az AF és BD egyenesek H metszéspontját is megjelölte. Thalész azt állította, hogy a sziget hossza a GH távolsággal egyezik meg. Igazolja Thalész állításának helyességét!



XVI. Vektorok

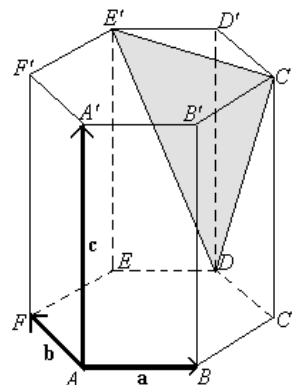
61.			f.1-9.	28-32.	
-----	--	--	--------	--------	--

I.

1. Igazolja, hogy az $A(0; 1)$, $B(4; 2)$, $C(3; 6)$ és $D(-5; 4)$ pontokkal megadott négyszög trapéz!

2. Az AB szakasz végpontjának a koordinátái: $A(-2; 1)$, $B(6; y_0)$, ahol $y_0 > 0$. Határozza meg az y_0 értékét, ha tudja, hogy az $\angle AOB = 90^\circ$, ahol O a koordináta-rendszer kezdőpontja!

3. Az $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ szabályos hatszög alapú hasáb A csúcsából induló él-vektorok: $\vec{AB} = \mathbf{a}$, $\vec{AF} = \mathbf{b}$, $\vec{AA'} = \mathbf{c}$ (lásd az ábrát). Fejezze ki a $\vec{C'A}$ vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok segítségével!



4. Bizonyítsuk be, hogy a következő három pont derékszögű háromszöget határoz meg:
 $A(7,4)$ $B(0,-5)$ $C(-2,1)$

5. A $(4, 3)$, $(6, -1)$ pontokat összekötő szakaszt mindkét irányban megnyújtjuk másfélszeresére. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit.

6. Egy négyszög csúcsaihoz és oldalfelező pontjaihoz egy O pontból vektorokat irányítunk. Bizonyítsuk be, hogy a csúcsokhoz vezető vektorok összege egyenlő az oldalfelező pontokba vezető vektorok összegével.

7. Az AB szakasz A -hoz közelebbi harmadoló pontja $(2, -3)$, A -hoz legközelebbi hatodoló pontja $(-1, -4)$. Számítsuk ki az A és B pontok koordinátáit.

II.

8. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében $\mathbf{a}(\cos t, \sin t)$ és $\mathbf{b}(\sin^2 t, \cos^2 t)$. a) Adja meg az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok koordinátáinak pontos értékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! b) Mekkora az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge $t = \frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) c) Határozza meg a t olyan valós értékeit, amelyek esetén az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek egymásra!
9. Számítsuk ki a háromszög szögeit, ha a csúcspontok koordinátái $(-1, -2)$, $(2, 3)$, $(4, -1)$.
10. Egy háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái $(-2, 3)$, $(4, 6)$, $(5, 2)$. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit.
11. A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2; 0)$, $Q(6; 0)$ és $R(0; 5)$ pontok, a H pedig a PQ szakasz tetszőleges pontja.
b) Számítsa ki a PH és RH vektorok skaláris szorzatát, ha $H(-1,8; 0)$.
c) Adja meg a H pont koordinátáit úgy, hogy a PH és RH vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!

III.

12. Az $ABCDEFGH$ téglatest élei: $AB = 10$; $AD = 8$; $AE = 6$. Legyenek az A csúcsból induló élvektorok rendre: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$; $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$. Az A csúcsból e három élvektor, továbbá három lapátlóvektor és egy testátlóvektor indul ki. Adja össze ezt a hét vektort, az összegvektort jelölje $\overrightarrow{AP}$.
a) Fejezze ki $\overrightarrow{AP}$ vektort az $\mathbf{a}$; $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ élvektorokkal! b) Milyen hosszú az $\overrightarrow{AP}$? c) Mekkora szöget zár be $\overrightarrow{AP}$ az $\overrightarrow{AE}$ vektorral? d) Mennyi az $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS}$ értéke, ha S a HFC háromszög súlypontja?
13. Az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest oldalélei $AB = 8$, $AD = 6$ és $AA' = 4$ egység hosszúak. Az A csúcsból induló élvektorok $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{c}$. Az A csúcsból indul még 3 lapátló-vektor, valamint a testátló-vektor. Legyen S a $CB'D'$ háromszög súlypontja. Számítsa ki az $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AS}$ szorzat értékét!
14. Az $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$ szabályos hatszög alapú hasáb A csúcsából induló él-vektorok: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AF} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{c}$ (lásd a fenti ábrát). Legyen S a $DC'E'$ háromszög súlypontja. Írja fel az AS vektort az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok segítségével!
15. Válasszuk ki az ABC háromszög súlypontja köré szerkesztett körnek egy tetszőleges P pontját. Bizonyítsuk be, hogy a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg a kör minden pontjára ugyanakkora.
16. Egy rombusz hosszabbik átlója kétszerese a rövidebbiknek. A rövidebb átló végpontjainak koordinátái $(-3, 7)$ és $(5, 11)$. Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit.
17. Egy téglalap hosszabbik oldala háromszorosa a rövidebbik oldalnak. Az egyik hosszabbik oldal végpontjainak koordinátái $(-2, 4)$ és $(7, 16)$. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak koordinátáit.

XVII. Trigonometria

	37-39.		15-20.	31-36.	
--	--------	--	--------	--------	--

I.

1. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm.

a) Mekkora a háromszög hegyesszögei?

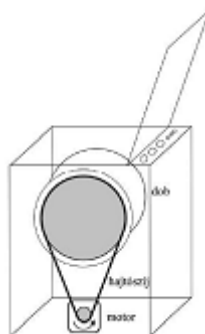
A BC befogó egy P belső pontját összekötjük az A csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.

b) Milyen hosszú a PB szakasz?

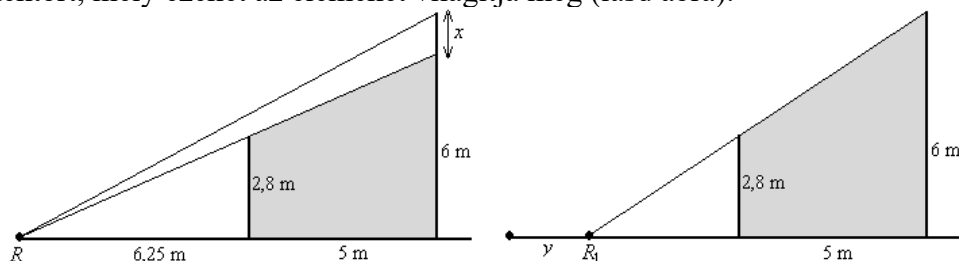
2. Egy háromszög a, b és c oldalairól tudjuk, hogy $c = 2b$, $a^2 + b^2 = 4$, $a^2 - b^2 = 2$.

a) Mekkora a háromszög oldalai? b) Mekkora a háromszög szögei? c) Mekkora a beírt körének sugara? Az eredmények pontos értékét adja meg!

3. Az ábrán egy mosógép vázlatos rajza látható. A kisebb, 1 cm sugarú kerék a motor tengelyéhez kapcsolódik, és egy hajtósíj segítségével forgatja meg a mosógép dobjához rögzített, 20 cm sugarú kereket, amitől a dob és benne a ruhák forognak mosás közben. A két kerék tengelye párhuzamos, a tengelyek távolsága 46 cm. (A hajtósíj a tengelyekre merőleges síkban van.) Milyen hosszú a feszes hajtósíj?



4. Egy színpadon egy 2,8 m-es és egy 6 m-es függőlegesen elhelyezett díszletelem van egymás mögött, egymástól 5 m távolságra. A 2,8 m-es elem előtt 6,25 m-re elhelyezték a földön egy R reflektort, mely ezeket az elemeket világítja meg (lásd ábra).



a) A 6 m-es díszletelem tetejét milyen magasságig világítja meg a reflektor?

b) A 6 m-es elem megvilágított része mekkora szögben látszik a reflektorból?

c) Mennyivel kellene a reflektort közelebb vinni a 2,8 m-es elemhez, hogy az teljesen leárnyékolja a 6 m-es elemet?

5. Egy 15° -os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fensíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!

6. Egy hegy és a tetején álló kilátótorony magasságát szeretnénk meghatározni. Legyen a kilátótorony legmagasabban lévő pontja A, a kilátó talppontja B. A hegy lábánál elterülő vízszintes, sík mezőn a toronytól ugyanabban az irányban felvesszük az egymástól 30 méterre lévő P és Q pontokat úgy, hogy az A, B, P és Q pontok ugyanabban a (függőleges) síkban legyenek. A P pontból a torony alját

(a B pontot) 29° -os, a tetejét (az A pontot) 33° -os, a Q pontból a torony alját 27° -os emelkedési szög alatt látjuk.

a) Hány méterrel emelkedik a mező fölé a hegy, amelynek tetején a kilátó áll?

b) Milyen magas a kilátó?

Válaszait egész méterre kerekítve adja meg!

7. Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a = 3$, $b = \sqrt{27}$ és $\beta = 2\alpha$. Számítsa ki a háromszög szögeit!

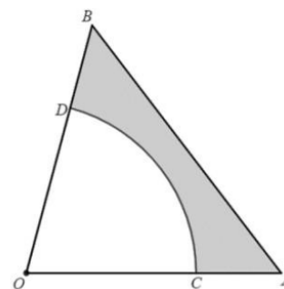
8. Az ABCD konvex négyszögben $AB = 50$ m, $BC = 60$ m, $CD = 70$ m, továbbá $\angle BAD = \angle BCD = 100,3^\circ$. a) Számítsa ki a négyszög területét.

9. A Budavári Siklót 1870-ben építették. Korabeli források szerint a sikló (hegyoldali vasútvonal) kivitelezője, Wohlfarth Henrik a pálya eredeti tervekben szereplő kb. 33 fokos hajlásszögét – ma már nem tudni, milyen okból – 30 fokra csökkentette. A kivitelezés során a felső állomás helye változatlan maradt, az alsó állomás azonban a tervekhez képest 6 méterrel feljebb került. (Az alsó állomás tervezett és valóságos helyét összekötő képzeletbeli egyenes merőleges a földfelszínre.) Határozza meg a sikló pályájának hosszát és a pálya szintemelkedését!

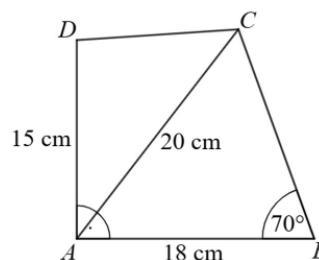
10.

Az OAB egyenlőszárú háromszög OA és OB szárai 12 cm hosszúak, $\angle AOB$ szöge 75° . Az OA szakasz C pontját és az OB szakasz D pontját (az ábra szerint) egy O középpontú, 8 cm sugarú körív köti össze.

a) Határozza meg a szürkére színezett tartomány területét és kerületét!



11. Az ABCD négyszög oldalai, átlói és szögei közül ismertek a következők:
 $AB = 18$ cm, $AD = 15$ cm, $AC = 20$ cm, $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle ABC = 70^\circ$
Határozza meg a négyszög BC és CD oldalának hosszát!



II.

12. Az ABC háromszögben $AB=2$, $AC=1$, a BC oldal hossza pedig megegyezik az A csúcsból induló súlyvonal hosszával. a) Mekkora a BC oldal hossza? A hosszúság pontos értékét adja meg!

b) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg!

13. A tengerparton néhány perccel 12 óra előtt felbocsátottak egy meteorológiai léggömböt, ami a tenger felé sodródva emelkedett. A léggömbön a magasságmérő 842 métert jelzett, amikor Aladár és Béla a tengerparton szögmérő műszerekkel bemérte a léggömb helyzetét pontban 12 órakor. Aladár azt állapította meg, hogy a léggömb 45° -os emelkedési szögben (a vízszintes sikkal bezárt szög) látszik, a léggömb és Béla helyét összekötő szakasz látószöge pedig 60° -os. Béla a léggömböt 30° -os emelkedési szögben látta. Milyen messze volt egymástól a két szögmérőműszer? (Lásd az ábrát a 27. feladatnál.)

14. István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek 120° -os szöget zárnak be.
a) Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek bekerítéséhez?

„Mekkora házat szeretnél rá építeni?” – kérdezte Péter. „Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül 100 m^2 alapterületűt. Úgy gondoltuk a párommal, hogy a házat a derékszögű sarokba építtetjük” – válaszolt István. „Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el” – szölt nevetve Péter.

b) Rajzolja le, hogy milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter!

c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát m^2 -re kerekítve adja meg!)

15. András és Bálint éjszakai túrán vettek részt. Sík terepre érve a távolban két különböző irányban is tűzijátékot vettek észre, és meg akarták állapítani a két tűzijáték helyszínének a távolságát. Megmérték, hogy a fény felvillanása után az egyik irányból 18, a másik irányból 14 másodperc alatt ért hozzájuk a petárdák durranásának hangja. A hang terjedési sebességét 340 m/s -nak vették, a fény terjedéséhez szükséges időt elhanyagolták. Aztán – mivel szögmérőműszerük nem volt – András az egyik, Bálint a másik tűzijáték irányába indulva megtették 32-32 lépést, majd megmérték, hogy így egymástól 60 lépés távolságra kerültek. (Természetesen igyekeztek egyforma hosszúságú lépésekkel mérni.)

a) András és Bálint mérési adatai alapján számolja ki a két tűzijáték távolságát kilométer pontossággal!

A túra során a fele utat 2 km/h , a másik felét 5 km/h átlagsebességgel tették meg.

b) Mekkora az egész útra számított átlagsebességük?

16. Vízszintes terepen egy 6 méter mély, lefelé keskenyedő, négyszöglapok által határolt gödröt ástak. A gödör alja is vízszintes. A gödör nyílása egy $8 \times 8 \text{ m}$ -es négyzet, két szemközti lapja függőleges, a másik kettő pedig 75° , illetve 60° -os szöget zár be a földfelszín síkjával. (E két szemközti „ferde” lap síkjai 45° -os szöget zárnak be egymással.) Hány m^3 földet kellett kiásni a gödör elkészítéséhez? Az eredményt m^3 pontossággal adja meg!

17. A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.

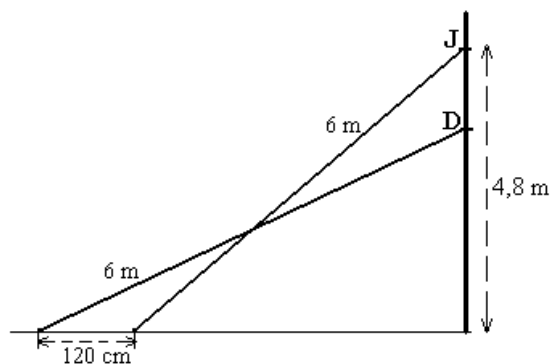
a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!

Egy $1,5 \text{ km}$ magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km -t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el!

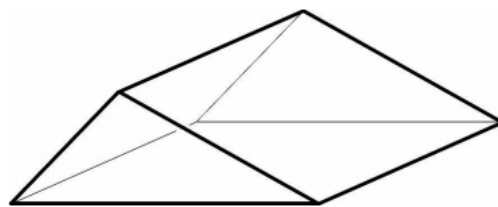
18. A derékszögűkoordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2; 1)$, $B(7; -4)$, $C(11; p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60° -os.

19. Rómeó egy 6 m hosszú létra segítségével akart bemászni Júlia ablakpárkányán, mely 4,8 m magasan volt. Sajnos a létrát 120 cm-rel hátrébb támasztotta ki, mint kellett volna, így tévedésből a Dadus ablakpárkányán mászott be (lásd az ábrát). a) Milyen magasan van a Dadus ablakpárkánya? b) A Júliához vezető létra és a – tévedésből – Dadushoz vezető létra mekkora szöget zárnak be egymással?

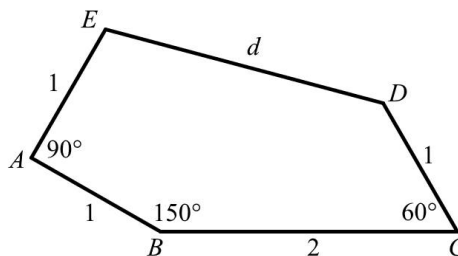
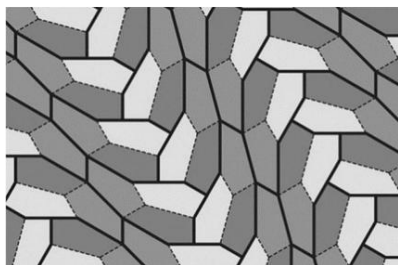


20. A Tetőfedők Egyesülete a veterán tetőfedőknek egy kicsi, tömör, névre szóló bronzplasztikával kedveskedik. Az emléktárgy alaplapja egy 4 cm oldalú négyzet, melynek két szemközti éléhez egy-egy, az alaplap síkjára merőleges, egymással egybevágó háromszöglap csatlakozik az ábra szerint.

A háromszöglapok két oldaléle 2 cm és 3 cm hosszú. Az emléktárgyhoz megrendelt téglatest alakú díszdoboz belsőmérete 4,1 cm $\times$ 4,1 cm $\times$ 1,5 cm, az emléktárgy készítésére felhasznált bronz sűrűsége pedig $8,2 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. Számítással igazolja, hogy a bronzplasztika befér a dobozba és tömege nem haladja meg a 10 dkg-ot!



21. Az interneten érdekes hírként jelent meg 2015-ben, hogy a matematikusok újabb, egybevágó ötszögekből álló hézagmentes síklefedést (parkettázást) fedeztek fel. (A két ábrán a parkettázás egy részlete, illetve a parketta egyik ötszögének néhány adata látható:
 $EA = AB = CD = 1$, $BC = 2$, $\angle EAB = 90^\circ$, $\angle ABC = 150^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$.)



b) Igazolja (például addíciós tételek segítségével), hogy $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

c) Igazolja, hogy az ötszög DE oldala hosszának pontos értéke $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

22. Az ABCD húrnégyszögben $AB = 20$, $BC = 18$, $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle CAD = 50^\circ$. Milyen hosszú a CD oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?

23. Egy háromszög oldalai a , $a + 1$ és $a + 2$ egység hosszúak. a) Igazolja, hogy ha a háromszög legnagyobb szöge γ , akkor $\cos \gamma = \frac{a-3}{2a}$. b) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát, ha a háromszög legnagyobb szöge 120 fokos!

24. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek a , b és c oldalaira teljesül, hogy (centiméterben mérve) $b = a + 4$ és $c = a + 8$.

a) Adott egy ilyen tulajdonságú háromszög, melynek legnagyobb szöge 120° . Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

b) Adott egy ilyen tulajdonságú háromszög, melynek leghosszabb oldala 24 cm hosszú. Határozza meg a háromszög területét!

c) Igazolja, hogy minden ilyen tulajdonságú háromszög kerülete nagyobb, mint 24 cm!

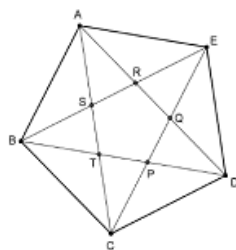
25. Az ABCD húrnégyszögben a BD átló hossza 20 cm, $\angle ABD = \angle BCA = 35^\circ$, $\angle DAC = 48^\circ$.

a) Igazolja, hogy $\angle BDA = 5^\circ$ és $\angle ACD = 35^\circ$.

b) Számítsa ki az ABCD húrnégyszög területét!

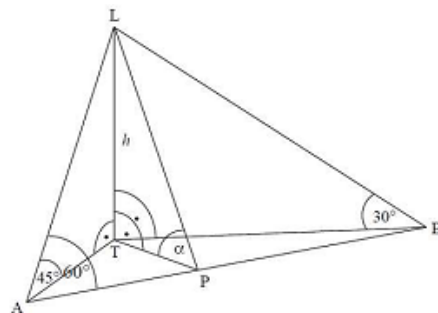
III.

26. Megrajzoltuk az ABCDE szabályos ötszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: P, Q, R, S, T. Tudjuk, hogy az ABCQ négyszög területe 120 cm^2 . Mekkora az ABCDE ötszög területe? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg!



27. A tengerparton néhány perccel 12 óra előtt felbocsátottak egy meteorológiai léggömböt, ami a tenger felé sodródva emelkedett. A léggömbön a magasságmérő 842 métert jelzett, amikor Aladár és Béla a tengerparton szögmérő műszerekkel bemérte a léggömb helyzetét pontban 12 órakor. Aladár azt állapította meg, hogy a léggömb 45° -os emelkedési szögben (a vízszintes síkkal bezárt szög) látszik, a léggömb és Béla helyét összekötő szakasz látószöge pedig 60° -os. Béla a léggömböt 30° -os emelkedési szögben látta.

Az Aladár és Béla helyét összekötő szakaszon lévő pontok közül a P pontból láthatták volna maximális emelkedési szögben a léggömböt 12 órakor. Igazolja, hogy P az ABT háromszög T-re illeszkedő magasságának talppontja!



28. A K középpontú és R sugarú kört kívülről érinti az O középpontú és r sugarú kör ($R > r$). A KO egyenes a nagy kört A és E, a kis kört E és D pontokban metszi. Forgassuk el a KO egyenest az E pont körül α hegyesszöggel! Az elforgatott egyenes a nagy kört az E-től különböző B pontban, a kis kört C pontban metszi. a) Készítsen ábrát! Igazolja, hogy az ABDC négyszög trapéz!

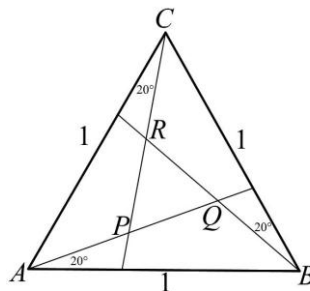
b) Igazolja, hogy az ABC háromszög területe $t = R \cdot (R + r) \cdot \sin 2\alpha$

c) Mekkora α szögnél lesz az ABC háromszög területe maximális adott R és r esetén?

29. Egy háromszög oldalhosszai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 4 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazolja, hogy a háromszögnek nincs 60° -os szöge!

30. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$. Az A csúsból induló súlyvonal a háromszög területét harmadolja. a) Mekkora a háromszög szögei? b) Milyen hosszú az A csúsból induló szögfelező, ha a háromszög alapja $AB = 10$ cm?

31. Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható PQR szabályos háromszöget kaptuk. Számítsa ki a PQR háromszög oldalának hosszát!



XVIII. Koordinátageometria

				85-99., 116-132.	
--	--	--	--	------------------	--

I.

1. Az ABC háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$$AB: y = 0 \quad BC: x + 10y = 20 \quad CA: y = \frac{1}{2}x - 4$$

a) Számítsa ki a háromszög csúspontjainak koordinátáit!

b) Számítsa ki a háromszög B csúcsánál lévő belső szöget!

2. Egy egyenlőszárú háromszög alapjának végpontjai $A(3;5)$ és $B(7;1)$. A háromszög harmadik csúcsa illeszkedik az y tengelyre. a) Számítsa ki a háromszög harmadik csúcsának koordinátáit! b) Írja fel a háromszög köré írt kör egyenletét!

3. Igazolja, hogy az $A(0; 1)$, $B(4; 2)$, $C(3; 6)$ és $D(-5; 4)$ pontokkal megadott négyszög trapéz!

4. Milyen távol van a $P(6; 10)$ pont a $2x - y = -3$ egyenesnek attól a pontjától, amelyik az $A(-3; 4)$ és $B(5; 2)$ pontoktól egyenlő távolságra van?

5. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának két csúcsa: $A(-3; -4)$, $B(1; 6)$. A harmadik csúcsa az $y + x = 2$ egyenletű egyenesre illeszkedik. a) Határozza meg a harmadik csúcs koordinátáit! b) Mekkora a háromszög területe?

6. Egy kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$. Számítsa ki a kör origóból húzott érintőinek hajlásszögét!

7. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16; 10)$, $B(2; 4)$, $C(10; 2)$. a) Számítsa ki az ABC háromszög B csúcsánál fekvő szögét!

8. a) Adja meg az $5x^2 + 5y^2 - 14x + 22y - 11 = 0$ egyenletű kör középpontját és sugarát!

Adott a k kör, amelynek középpontja a $K(5, -7)$ pont, és a sugara 10 egység. Ezen a körön belül adott az $A(4, -14)$ pont.

b) Írja fel annak az A ponton áthaladó e egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a KA szakaszra!

c) Határozza meg a k kör e egyenesre illeszkedő húrjának hosszát!

A koordináta-rendszer $P(x; y)$ pontját rácspontnak nevezzük, ha x és y egész számok.

d) Hány rácsponton megy át a k körvonal?

9. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

b) Írja fel a parabolához az $E(5; -8)$ pontjában húzott érintő egyenletét!

c) Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!

10. Egy téglalap alakú városi park tervezésekor a kezdeti egyszerű vázlatokat egy rajzolóprogram segítségével készíti el a tervező. A parkot derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja úgy, hogy a koordináta-rendszer tengelyein a hosszúságegység a valóságban 10 méternek felel meg. A park négy csúcsát az $A(0; 0)$, $B(30; 0)$, $C(30; 48)$, $D(0; 48)$ koordinátájú pontok adják meg. Az első tervek között a négy csúcson átmenő körút is szerepel.

a) Adja meg ennek a körnek az egyenletét!

A vázlatba a tervező egy olyan kört is berajzolt, amely egy díszteret határol majd. A kör egyenletét a rajzolóprogram $5x^2 + 5y^2 - 14x + 22y - 11 = 0$ alakban adta meg.

b) Számítsa ki, hány százaléka a díszteret területe a park területének!

A tervező egy olyan egyenest is megrajzolt, amely a park C csúcsában lévő bejáraton és a $P(18; 24)$ ponton halad át. Ezen az egyenesen egy sétaút halad majd.

c) Határozza meg a sétaút egyenesének egyenletét, és számítsa ki a parkbeli szakaszának valódi hosszát!

II.

11. a) Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 0,5x + 2$ és az $y = -0,5x + 4$ egyeneseket!

b) Az x tengely, az y tengely és a két ábrázolt egyenes közrefog egy konvex négyszöget. Mekkora ennek a négyszögnek a területe?

c) Az x tengely, az y tengely és a két ábrázolt egyenes hat metszéspontja közül négy egy konkáv négyszög négy csúcsa. Mekkora ennek a konkáv négyszögnek a kerülete?

12. Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x + y = 10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? Adja meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!

13. Jelölje e azokat az egyeneseket, amelyeknek egyenlete $2x + y = b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú, 4 egység sugarú körnek?

14. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1; -2)$. Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon!

15. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2; 5)$ pontra, valamint az $x + y = 4$ és az $x + y = 6$ egyenletű egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3.

16. Egy kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. a) Számítsa ki a kör és a koordinátatengelyek metszéspontjai által meghatározott alakzat területét! b) Írja fel a kör azon érintőjének egyenletét, mely áthalad az origón!

17. Az AB szakasz végpontjának a koordinátái: $A(-2; 1)$, $B(6; y_0)$, ahol $y_0 > 0$. Határozza meg az y_0 értékét úgy, hogy az x tengelynek csak egyetlen olyan pontja legyen, melyből az AB szakasz derékszögben látszik!

18. Egy háromszög egyik csúcsa az origóban van. Egy másik csúcsa az $5x - 8y = -2$ és $x + y = 10$ egyenletű egyenesek B metszéspontja. A háromszög S súlypontja $S(3; 3)$. a) Számítsa ki a háromszög harmadik csúcsának koordinátáit! b) Számítsa ki a háromszög területét!

19. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(-16; 10)$, $B(2; 4)$, $C(10; 2)$. A K pont egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től. b) Határozza meg a K pont koordinátáit!

20. Adott a $4x^2 + 4y^2 = 90$ egyenletű k kör és az $x + 3y = 0$ egyenletű g egyenes. Írja fel a k kör g -vel párhuzamos érintőinek egyenletét!

21. Adott az $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$ egyenletű k kör.

a) Igazolja, hogy az $E(-7; 5)$ pont rajta van a k körön!

b) Írja fel a k kör E pontjában húzható érintőjének egyenletét!

c) Határozza meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja!

22. Igazolja, hogy a $3x - 4y = -12$ egyenletű e egyenes felezi az ABC háromszög kerületét és területét is! $A(-6, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 8)$

23. Adott az $x^2 - 4y = 0$ egyenletű parabola és az $x - y = 5$ egyenletű g egyenes. a) Igazolja, hogy a parabola fókuszpontja az $F(0; 1)$ pont! b) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a g egyenesen van, valamint átmegy a $P(0; -1)$ ponton és a parabola F fókuszpontján is! c) Adja meg a parabola g egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét.

24. Adott az $x^2 + 2y = 16$ egyenletű parabola és az $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ egyenletű kör. a) Határozza meg a parabola fókuszpontjának és a kör középpontjának a koordinátáit! b) Igazolja, hogy a $Q(2\sqrt{2}; 4)$ pont a parabolának és a körnek is pontja, és a kör Q-ban húzott érintője érinti a parabolát is!

25. Adott az $A(5; 14)$ és a $B(7; 6)$ pont a koordináta-rendszerben.

a) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik az A és a B pontokra, és a középpontja az y tengelyen van!

b) Az $y = \frac{1}{2p}(x - u)^2 + v$ egyenletű parabola tengelypontja a B pont, és a parabola illeszkedik az A pontra. Határozza meg a parabola p paraméterének értékét!

III.

26. Egy háromszög két oldalegyenese: az x tengely, valamint az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Írja fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlőszárú, és

a) az alapja az x tengelyre illeszkedik;

b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei!

27. Egy egyenlőszárú háromszög szárainak metszéspontja a $C(0; 7)$ pont, a szárok hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (A és B) illeszkedik $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az A és B pont koordinátáit!

b) Írja fel az ABC háromszög egyik szäregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának a további közös pontja D. Határozza meg a D pont koordinátáit!

28. Az ABCD konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre: DA: $3x - 4y - 20 = 0$, AB: $3x + 5y - 20 = 0$, BC: $4x - 3y + 12 = 0$, CD: $5x + 3y + 15 = 0$. Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá hogy ennek a négyszögnek nincsen derékszöge!

29. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a $(2; 6)$ pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

30. Az ABCD húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete $2x - y = 4$. A trapéz AB alapjának egy belsőpontja $P(-5; 1)$, BC szarának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység. Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit!

31. a) Határozzuk meg azon négyzet csúcspontjainak koordinátáit, amelynek három csúcsa illeszkedik az $x^2 - 6x - 5y + 4 = 0$ egyenletű parabolára, és átlói párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel. b) Mekkora a négyzetbe írt kör területe?

32. Egy kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$. Írja fel azoknak a köröknek az egyenletét, melyek az első síknegyedben vannak, érintik a koordinátatengelyeket, valamint kívülről érintik a megadott kört!

33. a) Egy kör érinti a koordinátatengelyeket. A kör középpontja az $A(-6; -1)$ és $B(10; 7)$ pontoktól egyenlő távolságra van. Írja fel a kör egyenletét!

b) Egy háromszög két csúcspontja $A(-6; 2)$, $B(10; 2)$. A harmadik csúcsa illeszkedik az $y = -x$ egyenesre. Határozza meg a harmadik csúcs koordinátáit úgy, hogy a háromszög területét az x tengely felezze!

XIX. Differenciálszámítás

					1-25.
--	--	--	--	--	-------

I.

1. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 10x - 22$ és az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 6$ függvények. Írja fel az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű alakzatok közös pontjaiban az $y = f(x)$ egyenletű görbéhez húzható érintők egyenletét!

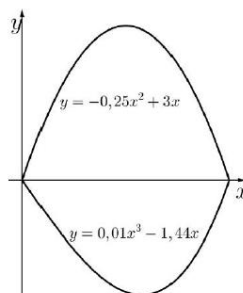
2. Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x) = -x^3 + x$ függvénynek lokális (helyi) maximuma?

3. Írja fel az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ másodfokú függvény grafikonjának a 3 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenletét!

4. Adott az $y = -x^2 + 2x + 5$ egyenletű parabola. Az $y = 2$ egyenletű egyenes és a parabola első síknegyedbeli metszéspontját jelöljük P-vel. Számítsa ki a parabola P pontbeli érintőjének a meredekségét!

5. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe. Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta)

6. A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y = -0,25x^2 + 3x$, illetve az $y = 0,01x^3 - 1,44x$ egyenletű görbéknek az az íve, amelyre $0 \leq x \leq 12$. (Ez a két ív az ábrán is látható.) Tudjuk, hogy a (0; 0) és a (12; 0) pont a két ív közös pontja. Mindkét ív esetében adja meg az ív x tengelytől legtávolabbi pontjának első koordinátáját!



7. Az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.

a) Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

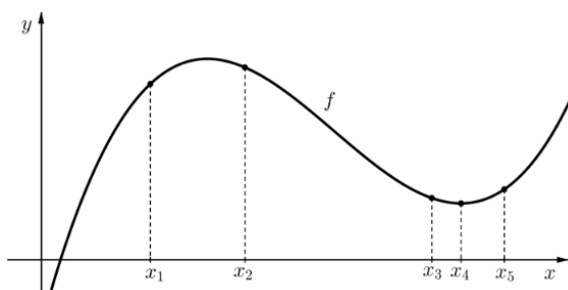
b) Írja fel a parabolához az E(5; -8) pontjában húzott érintő egyenletét!

8. Az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola az x tengelyt az A és a B pontban metszi. Számítsa ki a parabola B pontbeli érintőjének meredekségét, ha tudjuk, hogy a B pont első koordinátája pozitív!

9. Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $x \in \mathbf{R}$. Határozza meg az $f:]-4; -1[\rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$ függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket!

10. Adja meg az $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat P(5; -4) pontjában húzott érintőjének egyenletét!

11. Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet. Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába! (Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.)



hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

12. A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt 45° -os szögre törekszik a dobás indításánál. Petra dobásának modellezéséhez határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a P(0; 2) és a Q(4,6; 3) ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig 45° ! A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban adja meg!

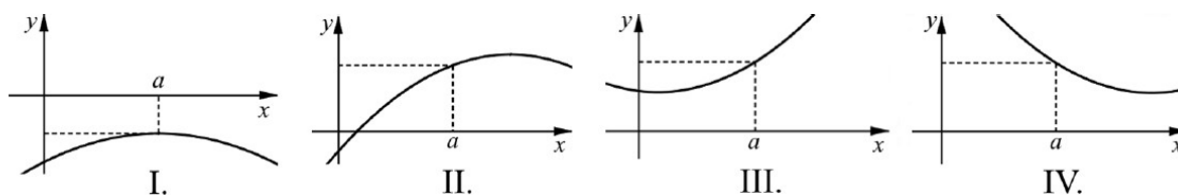
13. Ha egy cég x tonna lisztet állít elő egy nap alatt ($0 < x < 5$), és ezt a mennyiséget el is adja, akkor egy elemzés szerint a napi nyereség értékét az $n(x) = 0,8x^2(x - 3)(1,5 - x)$ képlet adja meg, a nyereséget tízezer tallérban számítva. (Negatív helyettesítési érték veszteséget jelent.) Hány tallér az elérhető legnagyobb napi nyereség, és ezt hány tonna liszt (előállítás és eladása) esetén éri el?

14.

Adott a valós számok halmazán értelmezett másodfokú f függvény. Ismert, hogy egy adott $a \in \mathbf{R}$ helyen $f(a) > 0$, $f'(a) > 0$ és $f''(a) > 0$ mindegyike teljesül.

a) Az alábbi ábrákon négy másodfokú függvény grafikonja látható. Ezek alapján tölts ki a táblázat üres mezőit aszerint, hogy a megfelelő kijelentés *igaz* vagy *hamis*, majd döntse el, hogy a négy grafikon közül melyik lehet az f függvényé!

(Válaszait itt nem kell indokolnia.)



Függvény-grafikon	Az a helyen a függvényérték pozitív	Az a helyen az első derivált értéke pozitív	Az a helyen a második derivált értéke pozitív
I.		HAMIS	
II.			
III.			
IV.			

Az f függvény grafikonja a(z) grafikon lehet.

b) A másodfokú g függvény értékét az $x \in \mathbf{R}$ helyen a $g(x) = px^2 + qx + r$ összefüggés adja meg ($p, q, r \in \mathbf{R}, p \neq 0$).

Határozza meg p, q és r értékét úgy, hogy $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$ és $g''(1) = 4$ teljesüljön!

II.

15. A könyvkiadó szerkesztője egy könyv nyomtatási formáját tervezi. Minden lap alsó, felső és külső szélén kettő centiméteres margót szeretne hagyni, a belső szélén a kötés miatt négy centiméterest. A teljes lap területe 600 cm^2 . Mekkora legyenek a lap méretei, ha a szerkesztő a lehető legnagyobb nyomtatási területet szeretné elérni a lapokon?

16. a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl.) Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ lokális szélsőérték-helye a függvénynek! Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvénynek lokális maximumhelye, vagy lokális minimumhelye! Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték-helye is! b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexió pontját!

17. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p + 3)x^2 + px - 6$. Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

18. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ függvény. Ábrázolja az $f(x)$ függvényt a deriváltfüggvény segítségével!

19. Értelmezzük a $]0; 12[$ intervallumon a következő hozzárendeléssel megadott f és g függvényeket:
 $f(x) = \frac{-0,25x^2 + 3x}{0,01x^3 - 1,44x}$ és $g(x) = -\frac{25}{x+12}$. Igazolja, hogy $f(x) = g(x)$, és mutassa meg, hogy a g függvény szigorúan monoton növekvő!

20. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x = -15$ -ben abszolút minimuma, $x = 0$ -ban lokális maximuma, $x = 9$ -ben lokális minimuma van a függvénynek!

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9; 5[$ intervallumon!

21. Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n -szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni ($n \in \mathbb{N}^+$). Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik!

b) Határozza meg azt az n értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne!

22. Egy téglatest térfogata 72 dm^3 . A téglatest egyik éle kétszer olyan hosszú, mint egy másik éle. Határozza meg az ilyen tulajdonságú téglatestek közül a minimális felszínű téglatest éleinek hosszát!

23. Adott az $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -x^3 + kx$ függvény (k valós paraméter). Az f függvény grafikonjához egy-egy érintőt húzunk az $x = 1$, illetve az $x = 2$ abszcisszájú pontjában. Igazolja, hogy a két érintő metszéspontjának első koordinátája (a k paraméter értékétől függetlenül) $\frac{14}{9}$.

24. Felül nyitott, négyzet alapú egyenes hasáb alakú tárolódobozt készítünk. A doboz alaplapijának anyagköltsége 4 tallér négyzetdeciméterenként, az oldallapok anyagköltsége 3 tallér négyzetdeciméterenként. Az egész doboz anyagköltségére összesen 300 tallér áll rendelkezésre.

a) Legfeljebb mekkora lehet a doboz magassága, ha alapélei 6 dm hosszúak?

b) Határozza meg a 300 tallérból elkészíthető maximális térfogatú doboz éleinek hosszát!

III.

25. Az ABC háromszög oldalai $AB = 42$, $BC = 40$ és $CA = 26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög AB oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög CA , illetve BC oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkora ennek a téglalapnak az oldalai?

26. Egy forgáskúp alapkörének átmérője 10 cm, alkotója 13 cm. Írjon ebbe egy olyan, a kúppal közös szimmetriatengelyű forgáshengert, amelynek alaplapija a kúp alaplapijára illeszkedik, és térfogata maximális! Mekkora ennek a hengernek a sugara?

27. Jancsi vázát készít. Egy 10 cm sugarú, belül üreges gömbből levágott m magasságú ($m > 10$) gömbszelet határoló köréhez egy szintén m magasságú hengerpalástot ragaszt. A henger sugara megegyezik a gömbszeletet határoló kör sugarával. Mekkora legyen Jancsi a gömbszelet m magasságát, hogy a vázába a lehető legtöbb víz férjen? (A váza anyaga vékony, ezért a vastagságától eltekintünk, s hogy ne boruljon fel, egy megfelelő formájú üreges fatálpra fogják állítani.) Tudjuk, hogy ha a gömbszelet magassága m , a határoló kör sugara pedig r , akkor a térfogata:

$$V = \frac{\pi}{6} m \cdot (3r^2 + m^2)$$

28. Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés teljes havi mennyisége (x kilogramm) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36 - 0,03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő összes havi kiadást (költséget) a $0,0001x^3 - 30,12x + 13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

a) Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel?

b) Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? (nyereség=bevétel–kiadás)

29. a) Határozza meg a $p > 0$ paraméter értékét úgy, hogy $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20)dx = 0$ teljesüljön!

b) Határozza meg az a, b, c valós paraméterek értékét úgy, hogy az

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 28$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek $x=2$ -ben zérushelye,
 $x=-4$ -ben lokális maximumhelye, $x=-1$ -ben pedig inflexiós pontja legyen!

30.

A valós számok halmazán értelmezett f függvény f' **deriváltfüggvényének** hozzárendelési szabálya:

$$f'(x) = (x-2)^2 \cdot (x-5).$$

a) Adja meg az f függvény összes lokális (helyi) szélsőértékének típusát és helyét!

b) Határozza meg az f függvény hozzárendelési szabályát úgy, hogy az f grafikonja áthaladjon a $(0; 1)$ ponton!

c) Igazolja, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \frac{3x^3 + x}{x^2 + 1}$ függvény szigorúan monoton növekedő!

Deriválással megoldható szélsőérték-feladatok

II.

31. Két európai nagyváros között egy repülőket üzemeltető társaság járatokat közlekedtet. Ezek a járatok legalább 10 utas esetén indulnak, és a gépek legfeljebb 36 utas szállítására alkalmasak. A társaság javítani szeretné a járatok kihasználtságát. Többek között mérlegelik a következő szabály szerinti üzemeltetést: 20 vagy annál kevesebb utas esetén fejenként 16 000 Ft-ért indítanak gépet. 20 fő feletti létszám esetén az összes utas számára annyiszor 400 Ft-tal csökken a 16 000 forintos viteldíj, amennyivel a létszám meghaladja a húszat. Hány utas esetén lesz a repülő-társaság bevétele egy járaton a legnagyobb, és mekkora ez a maximális bevétel?

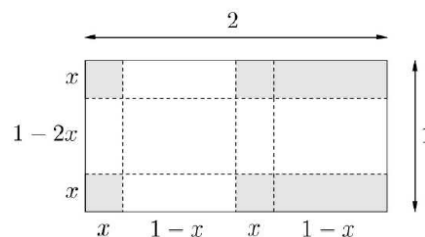
32. Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

A) az üzemeltetési költség x km/h átlagsebesség esetén $400 + 0,8x$ Ft kilométerenként;

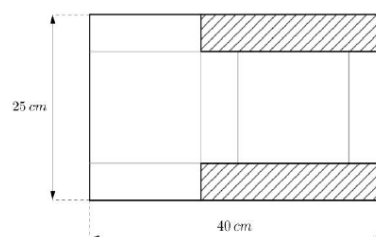
B) a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.

a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége? Válaszát km/h-ban, egészre kerekítve adja meg!

33. Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2 méter $\times$ 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagvesztéssel.) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen? Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg!



34. Egy 40 cm $\times$ 25 cm-es kartonlapból kivágunk két egybevágó téglalapot, az ábrán ezek vonalkázva láthatók. A megmaradt kartonlapból ezután (a berajzolt élek mentén) egy olyan téglatestet hajtogatunk, melynek magassága a kivágott téglalapok rövidebb oldalával egyenlő. Hogyan válasszuk meg a kivágott téglalapok rövidebb oldalának hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az elkészített téglatest térfogata maximális legyen? Mekkora a maximális térfogat?



35. A repülőgépek üzemanyagfogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x) = \frac{1}{20}(x^2 - 1800x + 950000)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban ($x > 0$), $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban. A vizsgálatba bevont, a Londontól 5580 km-re levő New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy $800 \text{ km/h} \leq v \leq 1100 \text{ km/h}$. A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a legnagyobb, és melyik esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás?

36. Egy kisvállalkozásnál több különböző méretben is gyártanak 200 literes, forgáshenger alakú lemezfordókat. Mekkora annak a 200 liter térfogatú, **felül nyitott** forgáshengernek a sugara és magassága, amelynek a legkisebb a felszíne?

37. Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti. Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket.

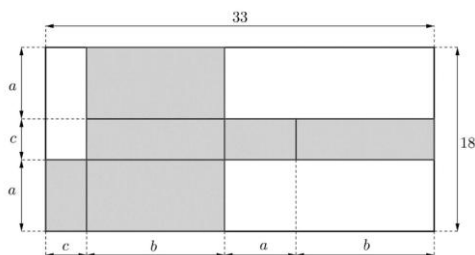
Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt”, azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságozzák a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is). A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.

A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

- a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóór alkalmazása esetén?
- b) Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóór alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális?

38. Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az ábra szerint választják meg.

- a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm!
 b) Hogyan kell megválasztani az a , b , c élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?



39. Határozza meg a $10\,000\text{ cm}^2$ felszínű forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatú henger alapkörének a sugarát és a henger magasságát.

40. Egy gyárban olyan 5 liter űrtartalmú lábosokat készítenek, melyek alakja jó közelítéssel (felül nyitott) forgáshenger. A lábosok külső felületét vékony, piros zománcréteggel vonják be. Mekkora legyen az 5 literes lábos alapkörének a sugara, hogy a külső felület bevonásához a lehető legkevesebb zománcot kelljen felhasználni?

41. Egy téglalap alakú kartonlap oldalhosszait úgy szeretnénk megválasztani, hogy alul és felül 4-4 cm-es, jobb és bal oldalon 2-2 cm-es margót hagyva a lap közepén megmaradó téglalap alakú terület 50 cm^2 nagyságú legyen. Mekkora legyen a kartonlap oldalainak hosszát, hogy a területe a lehető legkisebb legyen?

42. Hogyan válasszuk meg a 384 cm^2 felszínű négyzetes oszlop alapéleit, illetve oldaléleit, hogy a nyolc alapél és a négy oldalél hosszának az összege minimális legyen?

III.

43. A nyomda egy plakátot 14400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül el. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos. A 14400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege?

44. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a $(2; 6)$ pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P , az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q . Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki ezt a területet (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)!

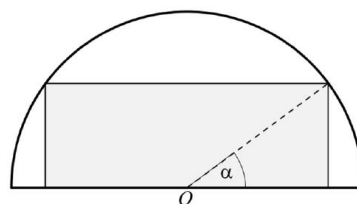
45. Egy játéküzemben fa elemekből álló építőkészletet gyártanak. Ha x darab készletet gyártanak naponta, akkor a teljes gyártási költség $k(x) = \frac{x^{1,5}}{5} + 12x + 300$ euró. Egy készletet 18 euróért tudnak értékesíteni. Naponta hány készletet gyártson az üzem, hogy a haszon a lehető legnagyobb legyen? Mennyi ez a maximális haszon?

46. Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdni, amelynek térfogata 1000 cm^3 . A doboz aljának és tetejének anyagköltsége $0,2 \text{ Ft/cm}^2$, míg oldalának anyagköltsége $0,1 \text{ Ft/cm}^2$. Mekkora legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve!

47. Adott a $[-3; 3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = -x^2 + 9$ függvény. a) Képezzük az összes olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek tengelye az y tengely, alappal szemközti csúcsa az origóban van, alapjának két végpontja pedig illeszkedik a függvény grafikonjára. Eztán képezzük a függvénygörbe és az x tengely által közbezárt tartományba beírható összes olyan téglalapot, melynek egyik oldala az x tengelyre egy-egy csúcsa pedig a függvény grafikonjára illeszkedik. A legnagyobb területű háromszög vagy a legnagyobb területű téglalap területe nagyobb?

48. Egy várrom területén szabadtéri színházat alakítanak ki. A tervrajz szerint a téglalap alakú színpadot az egyik bástya félkör alakban elhelyezkedő falmaradványai közé helyeznék el. A bástya belső átmérője 12 méter. (Az ábrán a tervrajz egy részlete látható: O a félkör középpontja, a téglalap csúcsába vezető sugár és az átmérő közötti szög pedig α , $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) Hogyan kell megválasztani az α szöget, hogy

a színpad területe a lehető legnagyobb legyen? Mekkora ez a legnagyobb terület?



49. Több részletben összesen 350 tonna árut szeretnénk vasúton elszállíttatni. Az egyik szállítócég árajánlatában a szállítási díj két összetevőből áll. Egyrészt a szállított áru tömegének négyzetével arányos díjat kell fizetnünk, másrészt az áru tömegétől független állandó alapidíjat is felszámítanak: ha egyszerre t tonna áru elszállítását rendeljük meg, akkor ezért $\frac{t^2}{10} + 205$ eurót kell fizetnünk.

a) Igazolja, hogy ha két részletben (két alkalommal) szállíttatnánk el a 350 tonna árut, akkor a vasúti költség abban az esetben lenne a legkisebb, ha az árut két egyenlő tömegű részre osztanánk!

A vasúti szállítás költségének csökkentése érdekében a 350 tonna tömegű árut n ($n \in \mathbb{N}^+$) egyenlő részre osztjuk, és azt tervezzük, hogy minden egyes alkalommal egy-egy részt szállíttatunk el a vasúttal.

b) Igazolja, hogy a szállítócég ajánlata szerint az n alkalommal történő vasúti szállítás költsége összesen $\frac{12250}{n} + 205$ euró lenne!

A vasúti szállítás költségén kívül figyelembe kell vennünk azt is, hogy ha a 350 tonna árut n egyenlő tömegű részre akarjuk szétosztani, akkor a munka elvégzéséért nekünk $(n - 1) \cdot 400$ eurót kell fizetnünk. ($n \in \mathbb{N}^+$)

c) Hány egyenlő tömegű részletre bontva lenne a legolcsóbb a 350 tonna áru elfuvaroztatása?

XX. Térgeometria

	11-14., 86-94.				27-49.
--	----------------	--	--	--	--------

I.

1. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának hossza 18 cm, a CA befogójának hossza 6 cm. Állítsunk merőleges egyenest az ABC háromszög síkjára a C pontban! A merőleges egyenes D pontjára teljesül, hogy CD hossza 15 cm. Mekkora az ABCD tetraéder térfogata?

2. Egy üzemben 4000 cm³-es, négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománcfestékkel vonják be. (A belső felülethez más anyagot használnak.) Számítsa ki, mekkora felületre kellene tűzálló zománcfesték egy olyan edény esetén, amelynek oldallapjai 6,4 cm magasak!

3. Egy 2 cm sugarú, 20 cm széles festőhengerrel dolgozva egy fordulattal körülbelül 3 ml festéket viszünk fel a falra. (A festőhenger csúszás nélkül gördül a falon.)

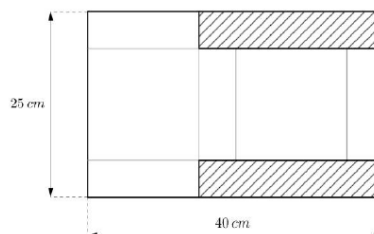
a) Elegendő-e 4 liter falfestéket vásárolnunk, ha a szobánkban 40 m² falfelületet egy rétegben, egyszer akarunk lefesteni?

b) Milyen magasan állna 4 liter falfesték a 16 cm átmérőjű, forgáshenger alakú festékes vödörben? Válaszát cm-ben, egészre kerekítve adja meg!

4. Két fémkocka összeolvasztásával egy nagyobb kockát készítünk. Az egyik beolvasztott kocka egy élének hossza p, a másiké pedig q ($p > 0$, $q > 0$). (Feltesszük, hogy az összeolvasztással kapott kocka térfogata egyenlő a két összeolvasztott kocka térfogatának összegével.) Igazolja, hogy az összeolvasztással kapott kocka felszíne: $6 \cdot \sqrt[3]{(p^3 + q^3)^2}$

5. Egy 40 cm × 25 cm-es kartonlapból kivágunk két egybevágó téglalapot, az ábrán ezek vonalkázva láthatók. A megmaradt kartonlapból ezután (a berajzolt élek mentén) egy olyan téglatestet hajtogatunk, melynek magassága a kivágott téglalapok rövidebb oldalával egyenlő.

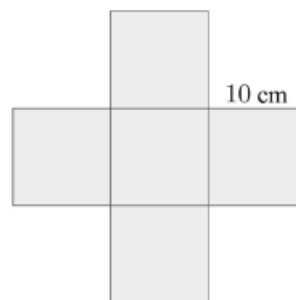
a) Mekkora lesz a kapott téglatest felszíne, ha a kivágott téglalapok rövidebb oldala 2 cm-es?



6. Egy fémlemezről készült, forgáshenger alakú hordóban 200 liter víz fér el. Mekkora területű fémlemez kell a 80 cm magas, **felül nyitott** hordó elkészítéséhez, ha a gyártása során 12% hulladék keletkezik?

7. Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert” használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig 30°-os szöveget zárnak be az alaplap síkjával. Határozza meg a tetraéder térfogatát!

8. A mellékelt ábrán egy kereszt alakú lemez látható, amely 5 db 10 cm oldalú négyzetből áll. A lemezből egy 10 cm alapélű, szabályos négyoldalú gúla hálóját szeretnénk kivágni úgy, hogy a középső négyzet legyen a gúla alaplapja.



a) Igazolja, hogy a lehetséges hálók kivágása során keletkező hulladék legalább 200 cm^2 , de kevesebb 300 cm^2 -nél!

9. Egy vízszintesen futó egyenes alagút függőleges keresztmetszete egy olyan $8,1 \text{ m}$ magas körszelet, amely egy 6 m sugarú körből származik. Az alagút hossza 340 m . (A kép illusztráció.) a) Mutassa meg, hogy a körszelet körívéhez (egész fokra kerekítve) 221° -os középponti szög tartozik a körben!

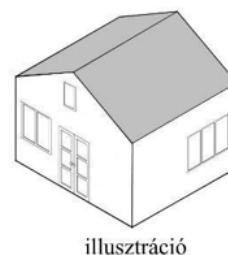
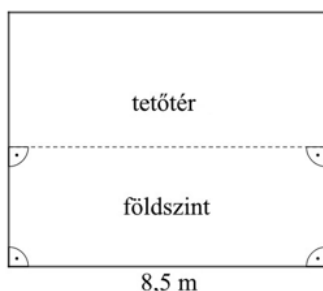
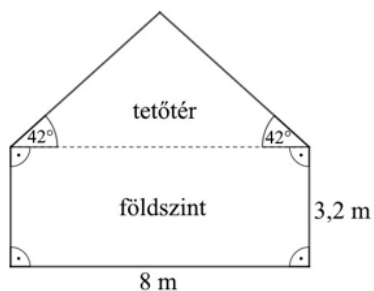
b) Számítsa ki az alagút térfogatát! Az eredményt ezer m^3 -re kerekítve adja meg!

Az alagút íves belső felületét kerámiaburkolattal látták el. Hány m^2 a kerámiával burkolt felület?

11.

Egy családi ház egy téglatest alakú földszinti részből és a rá illeszkedő, háromoldalú egyenes hasáb alakú tetőtérből áll. A ház néhány méretét előlnézetben és oldalnézetben mutatja az alábbi ábra. (A fal-vastagságtól mindenütt eltekintünk.)

Az ábrán megadott méretek alapján számolva válaszoljon az alábbi kérdésekre!



illusztráció

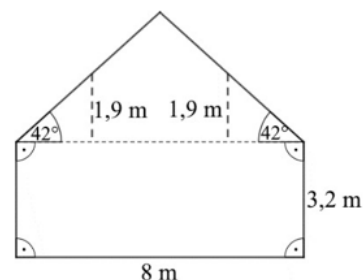
a) A teljes tetőfelületet cseréppel fedik. Mekkora ez a felület?

Válaszát m^2 -ben, egészre kerekítve adja meg!

b) Hány köbméter a ház teljes térfogata (földszint és tetőtér összesen)?

A beépített tetőtér alapterületének csak az a része számít lakóterületnek, ahol a belmagasság legalább $1,9$ méter.

c) Hány négyzetméter a ház teljes lakóterülete (a földszinti és tetőtérbeli lakóterület összesen)?



12. Az OAB háromszöget megforgatjuk az OA oldal egyenese körül.

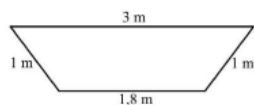
b) Határozza meg az így keletkező forgástest térfogatát!

II.

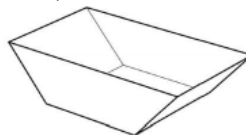
13. Egy kocka és egy gömb felszíne egyenlő. Bizonyítsa be, hogy a gömb térfogata nagyobb, mint a kockáé!

14. Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB = 4$, $AC = BC = \sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az AB alapél egyenesére illeszkedő S sík 30° -os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot. Számítsa ki a két rész térfogatának arányát!

15. A termelés során keletkezett hulladékot nagy méretű konténerbe gyűjtik, melyet minden nap végén kiürítenek és kitisztítanak. A konténer egyenes hasáb alakú. A hasáb magassága 2 m, alaplapja húrtrapéz, melynek méretei az 1. ábrán láthatók. A konténert vízszintes felületen, az 1,8 m x 2 m-es (téglalap alakú) lapjára állítva helyezik el (lásd a 2. ábrát). Számítsa ki a hasáb térfogatát!



1. ábra



2. ábra

Határozza meg, hogy milyen magasan áll a konténerben a tisztításához beletöltött 2,7 m³ térfogatú folyadék!

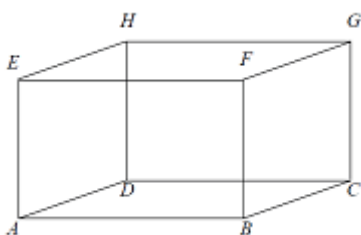
16. Ábrázolja a $[0; 6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto \frac{1}{2}|x - 4| + 3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! Forgassuk meg a $[0; 4]$ intervallumra leszűkített függvény grafikonját az x tengely körül! Számítsa ki az így keletkezett forgástest felszínét!

17. Egy középkori, román stílusban épült templom tornyának tetőrésze egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. A felújítás alkalmával ebben a tetőrészben egy olyan maximális méretű kocka alakú helyiséget alakítottak ki, amelynek járószintje a gúla alaplapján van, mennyezetének sarkai a gúla oldaléleire illeszkednek. a) Mekkora a tetőtéri helyiség alapterülete, ha a gúla élei 8 m hosszúak? b) A toronytetőlégterének hány százalékát foglalja el ez a helyiség?

18. Egy szobor márvány talapzatát egy 12 dm élű kocka alakú kőből faragják. Minden csúcsnál a csúcshoz legközelebbi élnegyedelő pontokat tartalmazó sík mentén lecsiszolják a kockát.

a) A kész talapzatnak hány éle; hány csúcsa; hány lapja van? b) A kész talapzatnak mekkora a felszíne?

19. Egy tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz alapjainak hossza 5, illetve 20 egység. Számítsa ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet úgy kapunk, hogy a trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja körül.



20. Az ABCDEFGH téglalest A csúcsból induló élei: $AB=12$; $AD=6$; $AE=8$. Jelölje a HG él felezőpontját P.

a) Számítsa ki az ABCDP gúla felszínét! b) Mekkora szöget zár be az ABCDP gúla ABP lapjának síkja az ABCD lap síkjával?

21. Egy ABCDE négyoldalú szabályos gúla alaplapja az ABCD négyzet. A gúlát elmetsszük az EAC síkkal. A síkmetszet területe 64 cm². Ha a gúlát az E csúcstól mért 4 cm távolságban, az alaplappal párhuzamos síkkal metsszük el, akkor 32 cm² területű síkmetszetet kapunk. a) Mekkora a gúla magassága, és mekkora az alaplapjának területe? b) Számítsa ki a gúla alaplapjának és oldallapjának hajlásszögét!

22. Egy forgáskúp nyílásszöge 90°, magassága 6 cm. a) Számítsa ki a kúp térfogatát (cm³-ben) és felszínét (cm²-ben)! b) A kúp alaplapjával párhuzamos síkkal kettévágjuk a kúpot. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata (cm³-ben), ha a metsző sík átmegy a kúp beírt gömbjének középpontján? Válaszait egészre kerekítve adja meg!

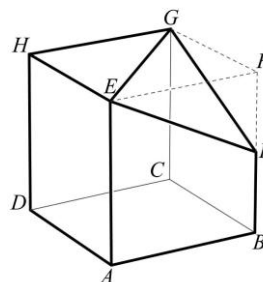
23. Ádámék kerti zuhanyozójának tartálya egy feketére festett, forgáshenger alakú, acéllemezből készült hordó. A henger átmérője 50 cm, magassága 80 cm.

- a) Számítsa ki a hordó térfogatát és felszínét!
(A lemez vastagsága a hordó méreteihez viszonyítva elhanyagolható.) A térfogatot egész literre, a felszínét egész négyzetdeciméterre kerekítve adja meg! A megadott méretű hordót úgy szerelik fel, hogy a forgástengelye vízszintes legyen. Ebben a helyzetben – a beömlő nyílás miatt – csak 40 cm magasságig lehet feltölteni vízzel.
- b) A teljes térfogatának hány százalékaig tölthető fel a vízszintes tengelyű tartály?



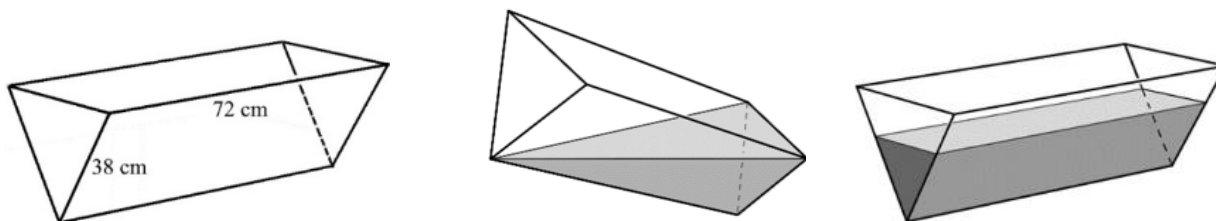
24. A 6 cm oldalélű tömör ABCDEFGH kocka BF élén megjelöltük az P felezőpontját, majd a kockát kettévágtuk az E, G, P pontokra illeszkedő síkkal (az ábra szerint).

- a) Mekkora a kettévágás során keletkezett nagyobbik test felszíne?
- b) Mekkora szöget zár be a metsző sík és a kocka EFGH lapjának síkja?

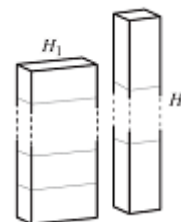
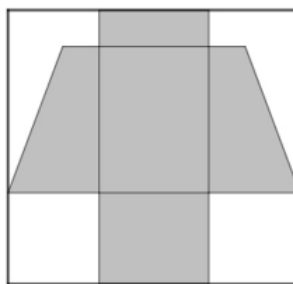
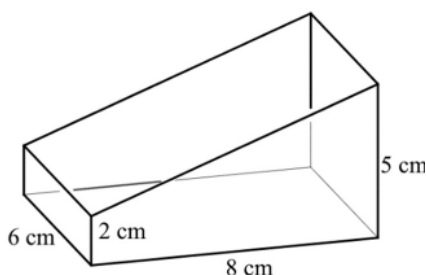


25. Egy csonkakúp alapkörének sugara 14 cm, fedőkörének sugara 8 cm, alkotója 10 cm hosszú. Géza szeretné gyorsan megbecsülni a csonkakúp térfogatát, ezért azt egy henger térfogatával közelíti. A közelítő henger alapkörének sugara megegyezik a csonkakúp alap- és fedőköré sugárának számtani közepével, magassága pedig egyenlő a csonkakúp magasságával. Határozza meg Géza közelítésének relatív hibáját! (Relatív hibának nevezzük a közelítő értéknek a pontos értéktől mért százalékos eltérését.)

26. Egy itatóvályú alakja háromszög alapú egyenes hasáb. Vízszintes helyzetében a vályú felül nyitott, a hasábnak ez a lapja párhuzamos a vízszintes talaj síkjával, a háromszög alakú lapok pedig a talaj síkjára merőlegesek (ld. az ábrát). A szabályos háromszög alakú lemezek oldalai 38 cm hosszúak, a két téglalap alakú oldallap pedig $38 \text{ cm} \times 72 \text{ cm}$ -es. A vízszintes helyzetű vályú kezdetben tele van vízzel. A vályú egyik végét megemeljük, ezért a víz egy része kifolyik belőle. A vályúban ekkor a vízfelszín a bal oldali szabályos háromszög alsó csúcsától a jobb oldali szabályos háromszög felső éléig ér, ahogyan az ábra mutatja. a) Igazolja, hogy ekkor a vályúban (egészre kerekítve) 15 liter víz van! A vályút ezután visszafektetjük eredeti, vízszintes helyzetébe. b) Hány cm magasan áll a víz a vályúban ekkor?



27. Egy felül nyitott doboz vízszintes asztallapon áll. A (bal oldali ábrán látható) dobozt három téglalap és két derékszögű trapéz határolja. A doboznak a vízszintes síkra illeszkedő lapja $8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ méretű, két egymással szemközti függőleges síkú lapja pedig $6 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, illetve $6 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ méretű téglalap. a) Számítsa ki a doboz testátlójának hosszát!



b) A test kiterített hálóját a középső ábra sötétített tartománya szemlélteti. Ezt a hálót egy $15\text{ cm} \times 16\text{ cm}$ -es téglalapról vágjuk ki (ennek oldalai párhuzamosak a test $8\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ -es alaplapjának oldalaival). Hány százalék hulladék keletkezik?

III.

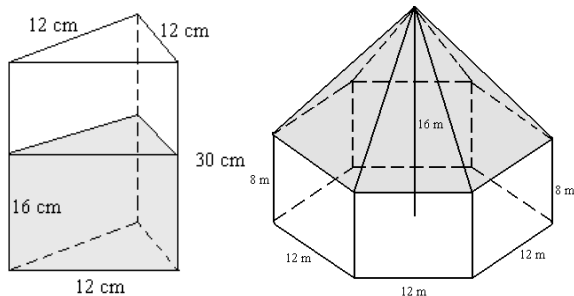
28. Az ABCDE szabályos négyoldalú gúla alaplapja az ABCD négyzet. A gúla alapéle 28 egység hosszú. Legyen F a CE oldalélnak, G pedig a DE oldalélnak a felezőpontja. Az ABFG négyszög területe 504 területegység. Milyen hosszú a gúla oldaléle?

29. Két egyenes hasábot építünk: H_1 -et és H_2 -t. (fenti jobb oldali ábra) Az építéshez használt négyzetes oszlopok (négyzet alapú egyenes hasábok) egybevágók, magasságuk kétszer akkora, mint az alapélük. A H_1 hasáb építésekor a szomszédos négyzetes oszlopokat az oldallapjukkal illesztjük össze, a H_2 hasáb építésekor pedig a négyzet alakú alaplapjukkal – az ábra szerint. A H_1 és H_2 egyenes hasábok felszínének hányadosa: $\frac{A_{H_1}}{A_{H_2}} = 0,8$ Hány négyzetes oszlopot használtunk az egyes hasábok építéséhez, ha H_1 -et és H_2 -t ugyanannyi négyzetes oszlopból építettük fel?

30. Egy képzőművészeti galéria új kiállítótermet nyitott gyermekek számára. A terem alakja egy négyzet alapú egyenes gúla, melynek belső méretei: az alapél 12 méter, az oldalél 10 méter. Az egyik kiállító művész azt kérte, hogy a kiállítás kivitelezője ragasszon az oldalfalakra körbe az alapélekkel párhuzamos keskeny színes csíkot (vonalat), amelyre majd a kiírásokat elhelyezik. A színes vonalak vízszintes, képzeletbeli síkja éppen felezte a kiállítóteret térfogatát. Mekkora a színes vonalak összes hossza? Milyen magasan helyezkedik el a padló síkja felett a képzeletbeli felezősík?

31. 10 cm sugarú, 24 cm magas egyenes körhenger alakú edényben 20 cm magasan áll a víz. A olyan egybevágó négyzet alapú szabályos gúlákat helyezünk, melyek minden éle 4 cm. A gúlákat elsüllyednek a vízben. Hányadik gúla vízbe helyezésekor kezd kifolyni a víz az edényből?

32. A 2 éves András testvére a 8 éves Béla. András születésnapja egybeesik Béla névnapjával. Erre az alkalomra édesapjuk készített egy egyenes körkúp alakú csokitortát kettőjüknek. A torta magassága 45 cm. a) A tortát az alaplapjával párhuzamos síkkal szeretnék kettévágni úgy, hogy a keletkezett két darab térfogatának aránya megegyezzen a fiúk életkorával arányával. Milyen magasan kell elvágni a tortát? b) Egy csonkakúp alapkörének a sugara 12 cm, fedőkörének sugara 6 cm. A csonkakúp palástjának a területe az alap- és fedőkör területe összegének a kétszerese. Mekkora a csonkakúp térfogata?



33. Az ábrán egy cirkuszi sátor látható. Alapja 12 m oldalú szabályos hatszög. Oldalfalai 8 m magasak; ennek tetején áll a sátor szabályos hatszög alapú egyenes gúla alakú tetőzete, melyet közepén egy 16 m-es rúd támaszt.

- Mekkora a sátor légtere?
- Az oldalfalakat és a tetőzetet viaszosvászonnal borították be. Hány m^2 anyagot használtak fel a borításhoz?
- A tetőzet oldalélei mekkora szöget zárnak be a közepén álló tartórúddal?

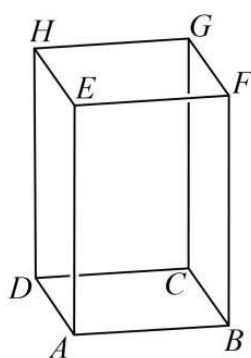
34. Egy 6 cm sugarú, 20 cm magasságú egyenes körhengerben valamilyen magasan áll a víz. Behelyezünk egy kockát, mely lesüllyed a vízben és éppen ellepi a vízszint. Ez után a kockát kivesszük és egy 1 cm-rel nagyobb élű kockát helyezünk a vízbe. Mikor ez is lesüllyed, ezt is éppen ellepi a víz. Mekkora volt az első behelyezett kocka éle?

35. Egy 10 cm sugarú egyenes henger alakú edénybe vizet öntöttünk. Eztán behelyezettünk egy olyan egyenes körkúpot, mely alapkörének sugara 6 cm, alkotója 12 cm hosszú. A kúp lesüllyed a víz fenekére, alapköre a henger alapkörére illeszkedik, de 3 cm magasan kiáll a vízből. Mennyit emelkedett a vízszint?

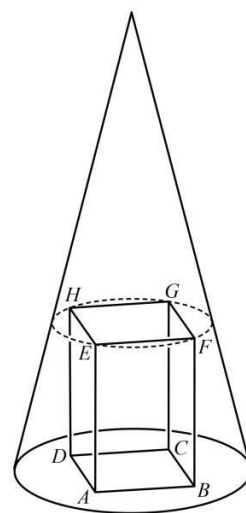
36. Az ABCDEFGH négyzetes oszlop AE, BF, CG, DH élei merőlegesek az ABCD alaplagra. Az A csúsból kiinduló három él hossza $AB = AD = 8$ egység, $AE = 15$ egység.

- Számítsa ki az EF és AH vektorok skaláris szorzatát!

A négyzetes oszlop köré egy P csúspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az A, B, C, D csúcsok a kúp alaplajára, az E, F, G, H csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.



- Számítsa ki a kúp felszínét!



XXI. Integrálszámítás

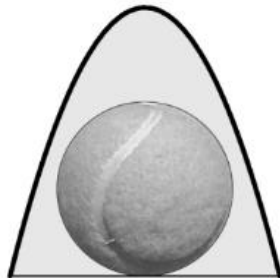
					51-72.
--	--	--	--	--	--------

I.

1. Határozza meg $\int_{-3}^3 (x^2 - 6x + 9) dx$ értékét!

2. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = x^3 - 3x^2$ egyenletű görbe. Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre!

3. Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni tenisz bajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszélet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszéletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 - y^2 - 2,6y = 0$. Hány százaléka a kör területe a parabolaszélet területének? A választ egészre kerekítve adja meg!



4. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény. A Newton-Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x)dx$ határozott integrál értékét!

5. Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $x \in \mathbb{R}$. Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x)dx = 0$ teljesüljön!

6. Határozza meg a $p > 0$ paraméter értékét úgy, hogy $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20)dx = 0$ teljesüljön!

7. Adott az $y = -5,2\cos x + 11,2$ egyenletű görbe, valamint az $x = 0$, az $y = 0$ és az $x = 2\pi$ egyenletű egyenesek. Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

8. Adott az $x^2 + 2y = 16$ egyenletű parabola. Határozza meg a parabola és az x tengely által közrezárt korlátos síkidom területét!

9. Határozza meg az $f(x)$ és $g(x)$ két függvény grafikonja által közbezárt síkidom területét, ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $f(x) = \sin x$ $g(x) = \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2$

10.

Legyen f a valós számok halmazán értelmezett függvény, ahol $f(x) = x^2$.

a) Határozza meg a és b értékét, ha $\int_a^b f(x) = 63$ és $f'(a) = b$.

II.

11. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 10x - 22$ és a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 6$ függvények. Oldja meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet! Ábrázolja az f és a g függvény grafikonját! Számítsa ki az $y = f(x)$, $y = g(x)$ egyenletű grafikonok és az $x = 6$ egyenletű egyenes által közrefogott, az y tengelyhez közelebbi síkidom területét!

12. Az f függvényt a következőképpen definiáljuk: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 5$. Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét!

13. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p - 3)x^2 + px - 6$. Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)dx$ határozott integrál értékét, ha $p = 3$.

14. Adottak az $x \geq 0$ valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 2x + 2$, valamint ugyancsak az $x \geq 0$ valós számok halmazán értelmezett $g(x) = \frac{1}{2}x + 8$ függvények. Számítsa ki a két függvény-görbe, valamint az y tengely által közbezárt tartomány területét!

15. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ függvény. Számítsa ki az $f(x)$ függvény görbéje és az x tengely által közbezárt terület nagyságát a $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ intervallumon.

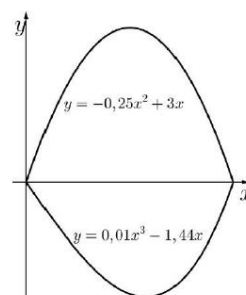
16. A társaság emblémájának alaprajzát az f és $-f$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidommal modellezhetjük, ahol: $[0; 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \in [0; 4] \\ \frac{x^2 - 12x + 36}{2}, & \text{ha } x \in [4; 6] \end{cases}$. Számítsa ki az embléma modelljének területét!

17. Határozza meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvényben az a , b és c valós paraméterek értékét, ha a függvényről tudjuk a következőket:

(1) $f(1) = f(-1) + 4$ (2) $f'(3) = 10$ (f' az f deriváltfüggvénye) (3) $\int_0^2 f(x)dx = -8$

18. Adott az f és g függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$. Számítsa ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt területet!

19. A derékszögű koordináta-rendszerben adott az $y = -0,25x^2 + 3x$, illetve az $y = 0,01x^3 - 1,44x$ egyenletű görbéknek az az íve, amelyre $0 \leq x \leq 12$. (Ez a két ív az ábrán is látható.) Tudjuk, hogy a $(0; 0)$ és a $(12; 0)$ pont a két ív közös pontja. Mekkora a két ív által közrezárt síkidom területe?



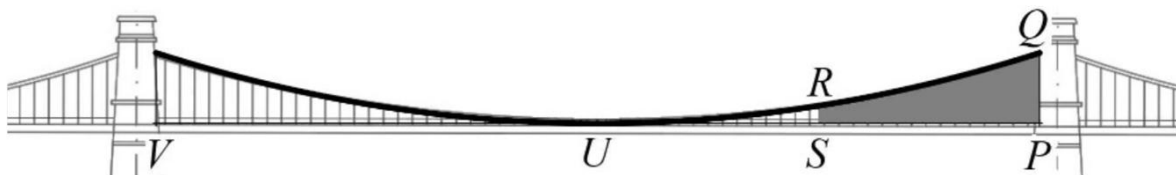
20. Adott az f , a g és a h függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2^x - 1$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 3x + 2$, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = 12 - x^2$. Mekkora a h és az $x \mapsto -4$ ($x \in \mathbb{R}$) függvények görbéi által közbezárt (korlátos) terület?

21. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény: $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 10 + 10x - x^2$. Határozza meg azt a t valós számot a $[2; 8]$ intervallumban, amelyre teljesül, hogy az f függvény görbéje alatti terület a $[2; t]$ intervallumon megegyezik a g függvény görbéje alatti területtel a $[t; 8]$ intervallumon. (Egy $[a; b]$ intervallumon folytonos függvény görbéje alatti terület ezen az intervallumon megegyezik az x tengely, az $x = a$, az $x = b$ egyenletű egyenesek és a függvény grafikonja által meghatározott síkidom területével.)

22. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 12x + 27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola. Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!

23. Mekkora területű síkidomot zár közre az $y = -x^2 + x + 6$ egyenletű parabola és az $x - y + 2 = 0$ egyenletű egyenes?

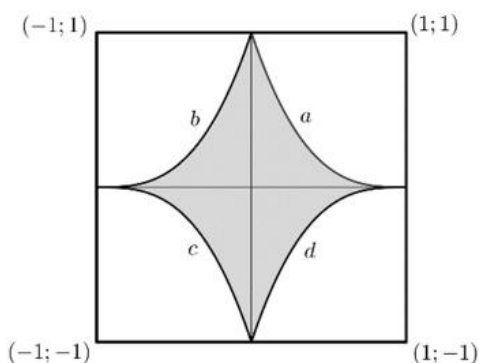
24. Az egyik cég azzal bizott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.



A híd két támpillérének PV távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a PV felezőpontja (U), a tengelye pedig a PV felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága PQ = 16 méter, a vászon tervezett szélessége PS = 50 méter. A tervek szerint a QR íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített PQRS területet fedi majd be (RS merőleges PS-re). Hány m^2 területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező?

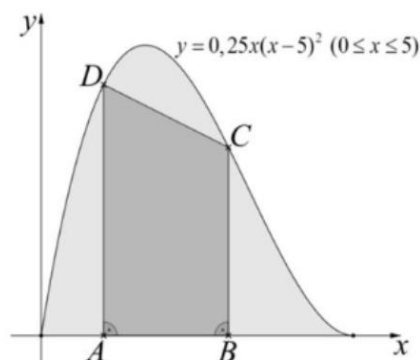
25. Egy kétszemélyes társasjátékot olyan négyzet alakú táblán játszanak, amelyet fehér és szürke mezőkre osztottak fel az ábra szerint. Ha a táblát egy olyan koordináta-rendszerbe helyezzük, amelyben a négyzet csúcsainak koordinátái $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, illetve $(1; -1)$, akkor ebben a koordináta-rendszerben az a jelű ív egyenlete: $y = (1 - x)^3$, $0 \leq x \leq 1$. A tábla középpontosan és tengelyesen is szimmetrikus.

a) Írja fel a másik három (az ábrán b, c, illetve d jelű) ív egyenletét is!



A társasjáték gyártója a 2 dm oldalú tábla fehér színű részének bevonásához egy speciális anyagot használ. Ebből 1 kg mennyiség $12 m^2$ terület bevonásához elegendő. b) Számítsa ki, hogy 4000 darab tábla elkészítéséhez hány kg speciális anyag szükséges!

26. Az ABCD derékszögű trapéz egyik szárának két végpontja az $A(1; 0)$, illetve a $B(3; 0)$ pont, a másik két csúcsa pedig a megadott görbén van, az ábra szerint. A megadott görbe és az x tengely $[0; 5]$ szakasza egy korlátos síkidomot fog közre. b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk ennek a korlátos síkidomnak egy pontját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a trapéznek is pontja lesz?



27. Igazolja, hogy tetszőleges $a < b$ paraméterek esetén $\int_a^b (2x - 1) dx = (b - a)(b + a - 1)$

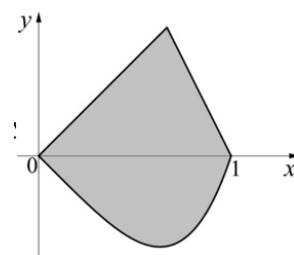
Határozza meg az a és b **egész** paraméterek lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy

$$\int_a^b (2x - 1) dx = 8. \quad (a < b)$$

28. Az ábrán egy medence méretarányos (kicsinyített) felülnézeti tervrajza látható. A medencét az $y = x$ és az $y = -2x + 2$ egyenletű egyenes, valamint az $y = x^3 - x$ ($0 \leq x \leq 1$) egyenletű görbe fogja közre. Számítsa ki, hogy mekkora a tervezett medence alapterülete, ha a tervrajzon látható $(0; 0)$ és $(1; 0)$ pontok távolsága a valóságban 12 méter lesz.

III.

29. Az f függvényt a $[0; 5]$ intervallumon értelmezzük: $f(x) = 3\cos x - \cos(-x)$. Mekkora területű síkidomot határol az x tengely $[0; 5]$ intervalluma; az y tengely $[0; f(0)]$ intervalluma; az $x = 5$ egyenes $[0; f(5)]$ intervalluma és az f függvény görbéje?



30. Legyen f és g is a valós számok halmazán értelmezett függvény

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \leq -1 \\ 2x + 1, & \text{ha } -1 < x < 0 \\ 1, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{és } g(x) = x^2 - 2$$

Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét!

31. $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, ahol a pozitív valós szám és $x \in \mathbb{R}$. Igazolja, hogy

$$\int_0^a f(x) dx = -a^3 + a$$

32. Jelölje az $y = x^2 - 4x - 12$ egyenletű parabola tengelypontját C , az x tengellyel alkotott metszéspontjait pedig A és B . Az ABC háromszög területe hányad része a parabola és az x tengely által közrefogott zárt síkidom területének?

33. Az $x^2 = 2y$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 \leq 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét!

34. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonjának tengelypontja a $T(4; 2)$ pont, és a $P(2; 0)$ pont is illeszkedik a grafikonra. Számítsa ki az f grafikonja és az x tengely által határolt tartomány területét!

35. Adottak a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ függvény. Számítsuk ki az $f(x)$ függvény $x = 2$ helyhez tartozó érintője, a koordinátatengelyek, valamint az $f(x)$ függvény görbéje által közbezárt terület nagyságát!

36. Az $y = -x^2 + 3x - 4$ egyenletű görbét toljuk el az y tengellyel párhuzamosan 3 egységgel pozitív irányba. Számítsuk ki az eredeti és az eltolással kapott görbe közötti területet az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 3$ határok között.

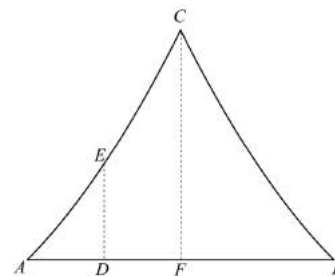
37. Határozzuk meg a következő két függvénygörbe által bezárt területet:

$$f: x \mapsto x^2 - 2x \quad \text{és} \quad g: x \mapsto 12 - x^2$$

38. Tekintsük a $[0, 2\pi]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \cos x$ függvényeket. Mekkora területű az $f(x)$ és a $g(x)$ görbéje által határolt síkidom?

39. Az $f(x) = x^2 - 4x + 3$ függvény határozott integrálja 0-tól valamely $p > 0$ valós számig 0. Határozza meg a p paraméter értékét!

40. Az ábrán az egyesület székházának függőleges síkú homlokzata látható, amelyet az AC és BC egybevágó parabolaívek határolnak. A parabolák tengelye egy-egy függőleges egyenes, ezek az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezkednek el. A homlokzat szélessége AB = 8 méter, magassága FC = 6 méter, az AF szakasz D felezőpontjában mért tetőmagasság pedig DE = 2,5 méter. Hány négyzetméter a homlokzat területe?



41. Adott az $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 4$ egyenletű parabola és az $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$ egyenletű f egyenes. Határozza meg a parabola és az f egyenes által határolt korlátos síkidom területét!

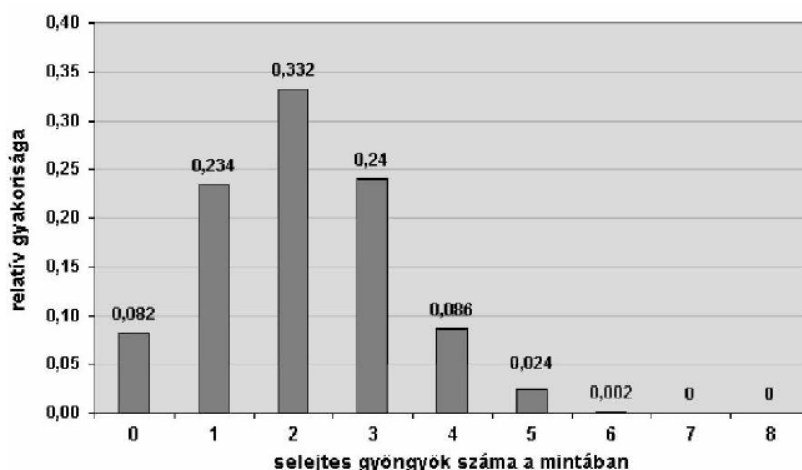
XXII. Statisztika

				146-153.	 -
--	--	--	--	----------	-------------

I.

1. Egy dobozban 40 üvegyöngy között 8 selejtes van. Egy kísérlet abból áll, hogy a 40 gyöngy közül visszatevés nélküli mintavétellel, véletlenszerűen kiválasztanak 10-et, és megszámlálják, hogy hány selejtes van közöttük.

Egy tanulócsoporthoz tagjai összesen 500 alkalommal végezték el a fent leírt kísérletet. A kísérletek befejezése után összesítették a tapasztaltakat: a 10 elemű mintákban előforduló selejtes gyöngyök számának relatív gyakoriságát oszlopdiagramon ábrázolták. A diagram segítségével válaszoljon a következő kérdésekre:



I. Mennyi volt az egy mintában előforduló legtöbb selejtes gyöngy?

II. Mennyi volt az egy mintában legtöbbször előforduló selejtszám?

III. Hány alkalommal nem volt a 10 elemű mintában egyetlen selejtes gyöngy sem?

2. Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egyik az A futószalagra kerül, a másik a B futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az A futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g és 46 g. Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik!

3. Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg ± 10 dkg”. (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem

mérhető ki.) A minőség-ellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak nyolc csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot. A mérések eredménye a következő:

mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

- a) A mérési eredmények alapján engedélyezik-e az almák árusítását?
b) Határozza meg a nyolc mérési eredmény átlagát és szórását!

4. Egy kisváros vasútállomásáról munkanapokon 16 vonat indul, ezek indulási időpontjáról kimutatást vezetnek. A mellékelt táblázat ezt mutatja egy adott munkanap esetében. A vasútállomás pontosságra vonatkozó előírása szerint munkanapokon a vonatok legalább egyharmadának pontosan kell indulnia az állomásról, továbbá a késéseknek sem az átlaga, sem a mediánja nem haladhatja meg a 3 percet. a) Legfeljebb hány perc késéssel indulhat a választott munkanapon az utolsó két vonat, hogy mindegyik előírás teljesüljön? (A késéseket egész percekben mérik, a pontos indulást 0 perces késésnek számítják, a vonatok a menetrendben előírt indulási időpontjuknál korábban nem indulhatnak el.)

Indulás időpontja		
menetrend szerint	ténylegesen	késés (perc)
6:10	6:10	0
6:32	6:33	1
8:10	8:10	0
8:32	8:38	6
10:10	10:15	5
10:32	10:37	5
12:10	12:10	0
12:32	12:35	3
14:10	14:14	4
14:32	14:40	8
16:10	16:17	7
16:32	16:32	0
18:10	18:14	4
18:32	18:32	0
20:10		
20:32		

5. Az egyik hét munkanapjain utasszámlálást végeztek a személyvonaton. Hétfőn 200, kedden 160, szerdán 90, csütörtökön 150 utast jegyeztek fel. Hány utas volt pénteken, ha tudjuk, hogy az öt adat átlaga is szerepel az adatok között, továbbá az adatok (egyetlen) módusza nem egyenlő a mediánjukkal?

6. Egy baráti társaság 8 tagjának tömegét mutatja a következő táblázat.

név	Albert	Bori	Csaba	Dénes	Elek	Frigyes	Gabi	Helga
tömeg (kg)	82	74	90	88	85	85	63	71

Adja meg a 8 adat mediánját, átlagát és szórását!

7. Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384. Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!

8. Egy 8 fős csapat kosárlabdaedzése közben mind a nyolcan 10-szer kíséreltek meg hárompontost dobni. A sikeres dobások számát mind a nyolc főnél felírták. A feljegyzett számok: 6, 3, 7, 6, 4, 7, 8 és 7. Határozza meg a sikeres dobások számának átlagát, mediánját és szórását!

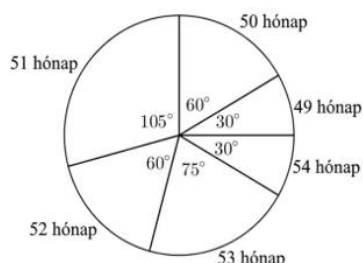
9. Egy szabályos dobókockával hatszor dobtunk. A dobott számok egyetlen módusza, a mediánja és az átlaga – ebben a sorrendben – egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozat három szomszédos tagja. Adjon meg egy megfelelő dobássorozatot, és igazolja, hogy a megadott dobássorozat a feltételeknek megfelel! Igaz-e, hogy a megadott hat szám szórása is tagja ugyanennek a számtani sorozatnak?

10. Egy biliárdgolyó készletben található 9 golyó tömegére a következő mérési eredményeket kapták (grammban):

163, 163, 163, 163, 163, 164, 165, 166, 166.

Egy ilyen készletet akkor hitelesítenek a minőségellenőrzésen, ha a következő feltételek mindegyikének megfelel: minden golyó tömege legalább 160 gramm és legfeljebb 170 gramm; a golyók tömegének terjedelme legfeljebb 3 gramm; a golyók tömegének szórása legfeljebb 1 gramm. Hitelesíthető-e ez a készlet?

11.



Egy napelemes akkumulátortöltőket gyártó cég termékei közül 24 darabnak az élettartamát vizsgálták. A vizsgálat végeredményét (a 24 darabra vonatkozóan) a kördiagram szemlélteti. Töltse ki a következő táblázatot, és határozza meg a 24 darab töltő élettartamának átlagát és szórását!

élettartam (hónap)						
darabszám						

12. Egy filmes portálon a Parabola című filmet 83-an értékelték 1-10-ig egy-egy egész számmal. A film erősen megosztotta a nézőket: 46-an 1-essel értékelték azt, ugyanakkor a kapott értékelések átlaga pontosan 5 lett. Számítsa ki a 83 értékelés szórását!

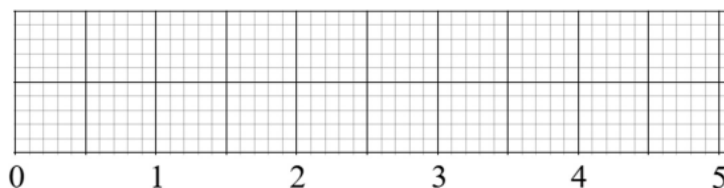
13. Az interneten található adatok alapján a napenergiát elektromos energiává alakító eszközök maximális összteljesítményének magyarországi alakulását a következő táblázat szemlélteti (megawattban mérve).

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
összteljesítmény (MW)	12	35	77	168	225	300	640	1277

a) A fenti táblázat adatai alapján készült a következő táblázat, amely azt mutatja, hogy hány-szorosára változott a maximális összteljesítmény az egymást követő években az előző évi maximális összteljesítményhez viszonyítva. A még hiányzó három számot írja a következő táblázat üres mezőibe, majd számítsa ki a kapott 7 szám átlagát és szórását!

év	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
ebben az évben a maximális összteljesítmény az előző év nek ennyiszere:	2,92		2,18		1,33		2,00

14. Az 510 tanuló év végi tanulmányi átlagairól (a kitűnők számán kívül) még a következő információkat tudjuk: az év végi átlagok terjedelme 2,4; módusza 3,8; mediánja 4,0; átlaga 4,2; szórása 0,9; alsó kvartilise 3,3; felső kvartilise 4,6. Készítsen a tanulók év végi tanulmányi átlagairól sodrófadiagramot!



II.

15. A következő táblázat egy ország munkaképes lakosságának foglalkoztatottság szerinti megoszlását mutatja. Az adatok ezer főre kerekítettek.

	Ágazatok	2003. év (ezer fő)	2004. év (ezer fő)
Foglalkoztatottak	Mezőgazdaságban dolgozó	1020	
	Iparban dolgozó	1870	1926
	Szolgáltatásban dolgozó	5015	
Munkanélküli		595	
Munkaképes lakosság összesen		8500	

2004-ben:

- az ország munkaképes lakosságának száma 3 ezrelékkal nőtt 2003-hoz képest,
- a munkanélküliek aránya a munkaképes lakosságban változatlan maradt,
- a szolgáltatásban dolgozók száma a 2003-ban ott dolgozók számának 2%-ával megnőtt.

a) Számítsa ki a táblázat hiányzó adatait (ezer főre kerekítve)!

b) Ábrázolja kördiagramon a foglalkoztatottak ágazatok szerinti megoszlását 2003-ban!

c) Hány százalékkal változott a mezőgazdaságban dolgozók száma 2004-re a 2003-as állapothoz képest? Nőtt vagy csökkent?

16. Egy önkormányzatnál 220 dolgozó bruttó bére augusztus hónapban a következő táblázat szerint alakult:

Bér (ezer forintban)	68	108	154	184	225
Dolgozók száma	25	65	70	44	16

a) Ábrázolja a 220 dolgozó bérének eloszlását oszlopdiagramon!

b) Mennyi az augusztusi bruttó bérek átlaga és szórása?

c) Mennyi az augusztusi nettó bérek átlaga? (A bruttó bér a nettó bér 165%-a.)

d) Szeptemberben minden dolgozó bruttó bére 2500 Ft-tal nő. Hogyan változik a bruttó bérek szórása?

17. Egy nemzetközi matematikai felmérésben egy magyarországi középiskola 9-12. évfolyamából 100 diák vett részt. Minden diák ugyanazt a feladatlapot kapta, és a feladatlapon található feladatok teljes megoldásával maximálisan 150 pontot érhetett el. Az összes diák által elért pontszámok átlaga 100 pont volt. Másfélszer annyi 9-10. évfolyamos tanuló írta meg a felmérést, mint 11-12. évfolyamos tanuló, viszont a 11-12. évfolyamos tanulók átlagpontszáma másfélszer akkora volt, mint a 9-10. évfolyamos tanulóké. Számítsa ki a 11-12. évfolyamos tanulók átlagpontszámát!

18. Egy középiskola 12. osztályának egyik csoportjában minden tanuló olyan matematika dolgozatot írt, amelyben 100 pont volt az elérhető maximális pontszám. A csoport eredményéről a következőket tudjuk: 5 tanuló maximális pontot kapott a dolgozatára, minden tanuló elért legalább 60 pontot, és a dolgozatok pontátlagja 76 pont volt. Minden tanuló egész pontszámmal értékelt dolgozatot írt.

a) Legalább hányan lehettek a csoportban?

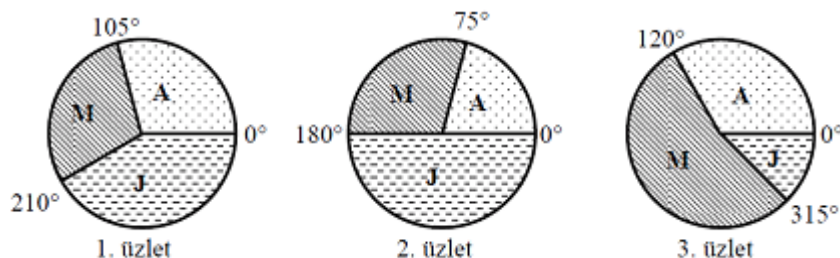
b) Legfeljebb hány diák dolgozata lehetett 60 pontos, ha a csoport létszáma 14?

19. Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozónapló sorrendje szerint:

166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159.

Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulójának centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm?

20. Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványából fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. A következő kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlásait szemléltetik.



a) A kördiagramok adatai alapján töltsé ki a következő táblázatot!

Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet?

b) Készítsen olyan oszlopdiagramot a táblázat alapján, amely a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat szemlélteti.

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János				
Márai Sándor				
József Attila				
Összesen	408	432	216	

21. Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban, és egy népesedésdinamikai modell előrejelzése alapján 2050-ben. A táblázat mindkét oszlopában szereplő országok népességi adataira vonatkozóan mennyivel változik az átlagos lakosságszám és a medián

1988 és 2050 között? (Válaszát millió főben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg.)

Sorrend	1988		2050 (előrejelzés)	
	Ország	Népesség (millió fő)	Ország	Népesség (millió fő)
1	Kína	1255	India	1533
2	India	976	Kína	1517
3	Egyesült Államok	274	Pakisztán	357
4	Indonézia	207	Egyesült Államok	348
5	Brazília	165	Nigéria	339
6	Oroszország	148	Indonézia	318
7	Pakisztán	147	Brazília	243
8	Japán	126	Banglades	218

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

22. Egy biztosító társaság 3 éven keresztül vizsgált évente 4000, a társaságnál biztosított autós káreseményeit. E vizsgálat eredményét szemlélteti a következő táblázat.

káresemény	0	1	2	3	4	5	≥ 5	1992
vezetők száma	3691	232	68	5	3	1	0	
káresemény	0	1	2	3	4	5	≥ 5	1993
vezetők száma	3580	326	77	11	6	0	0	
káresemény	0	1	2	3	4	5	≥ 5	1994
vezetők száma	3694	239	59	2	4	2	0	

a) Melyik évben volt az egy főre jutó káresemény a legnagyobb? b) Számítsa ki az 1 főre jutó káresemények szórását az 1992-es évben! c) A biztosító nyereségének növekedése öt éven keresztül a következő volt: **1. év:** 20%, **2. év:** 12%, **3. év:** 18%, **4. év:** 24%, **5. év:** 16%. Számítsa ki erre az 5 évre vonatkozóan az átlagos éves nyereségnövekedést!

23. Egy biológia fakultációs csoport tagjai olyan tesztet írtak, ahol a maximális elérhető pontszám 60 pont volt. 4-en érték el maximális pontot, senki nem kapott 40 pontnál kevesebbet. A teszt-dolgozatok átlaga 49,25 pont volt. a) Legalább hány tagja lehet a csoportnak? b) Ha a csoport létszáma 12 fő, akkor legfeljebb hányan írhattak 40 pontos dolgozatot? c) A 12 fős csoportban 4-en írtak 40 pontos dolgozatot, 1 fő 50 pontos, 1 fő pedig 54 pontos dolgozatot írt. Hányféleképpen alakulhatott a még hiányzó két fő dolgozata?

24. Egy 50 adatból álló adatsokaság minden adata eleme a $\{0; 1; 2\}$ halmaznak. a) Legfeljebb hány 2-es lehet az adatsokaságban, ha az adatok átlaga 0,32? b) Lehet-e az 50 adat mediánja 0, ha az átlaguk 1,04? c) Lehet-e az 50 adat egyetlen módusza az 1, ha az átlaguk 0,62?

25. Egy hételemű, pozitív egész számokból álló adatsokaság hat eleme: 10; 2; 5; 2; 4; 2. A hetedik adatot nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy a hét adat átlaga, módusza és mediánja (nem feltétlenül ebben a sorrendben) egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozat három egymást követő tagja. Határozza meg a hetedik adat lehetséges értékeit!

26. Egy kisvárosban hét nagyobb üzlet található. A tavalyi évben elért, millió forintba kerekített árbevételeikről tudjuk, hogy az átlaguk 120 millió Ft, és ez megegyezik a mediánjukkal. A hét adat egyetlen módusza 100 millió Ft. Két üzletben éppen átlagos, azaz 120 millió forintos a kerekített bevétel, a legnagyobb bevétel pedig 160 millió forint volt. Számítsa ki a kerekített bevételek szórását!

27. Egy adatsokaság hét pozitív egész számból áll. Az adatsokaságnak két módusza van, a 71 és a 75. Az adatsokaság mediánja 72, az átlaga 73, a terjedelme pedig 7. Határozza meg a hét számot!

28. Tomi edzője mindegyik focimeccs után az 1-10-es skálán értékeli (egy-egy egész számmal) a játékosok teljesítményét.

Az idei első hét mérkőzésen Tomi a következő értékeléseket kapta: 6, 8, 6, 2, 8, 8, 6.

a) Számítsa ki az első hét értékelés átlagát és szórását!

Tomi következő három mérkőzése után kiderült, hogy az addigi tíz értékelésnek az átlaga 6,3, a terjedelme 8, és egyetlen van.

b) Határozza meg, hogy hányas értékeléseket kapott Tomi ezen a három mérkőzésen!

A 11. mérkőzésre kapott értékelés után Tomi átlaga a kapott értékelés tizedével csökkent az előző tíz mérkőzésének 6,3-es átlagához képest.

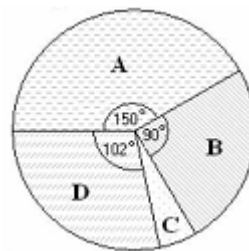
c) Hányas értékelést kapott Tomi a 11. mérkőzésen?

29. Bence tíz matematikajegyének átlaga és mediánja is 4, egyetlen módusza 5. (A jegyek egész számok, 1-től 5-ig.) Határozza meg Bence matematikajegyeit!

34. A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltő súly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették. Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!

II.

35. A piacon egy pénteki napon összesen 720 kg szilvát adtak el. Ez a mennyiség a következő kördiagram szerint oszlik meg az A, B, C és D fajták között. Átlagosan mennyit fizettek a vevők egy kilogrammért az adott napon, ha az egyes fajták ára: A – 120 Ft/kg, B – 200 Ft/kg, C – 230 Ft/kg, D – 260 Ft/kg.



36. Egy iskola tanulóinak tanév végi létszáma az egyik tanévben 400-nál több volt, de nem érte el a 430-at. A tanév végén kiszámították, hogy a fiúk tanulmányi eredményének átlaga 4,01, a lányoké 4,21, míg az iskola összes tanulójaé 4,12. (Ezen három átlag mindegyike pontos érték.) Hányan jártak az iskolába az adott tanév végén?

37. Egy matematikatanár akkor mondja, hogy rosszul állította össze a dolgozatot, ha a jegyek átlaga e és π között van. Egy 35 fős osztályból a legjobb gyerek munkáját még nem nézte meg, és ekkor az átlag kerekített értéke 2,68 volt. Hogyan sikerülhetett a legjobb tanuló dolgozata, ha a tanár elmondhatta, hogy rosszul állította össze a dolgozatot?

38. Az őszi idény kezdete előtt egy hónappal a MAFKK csapatához csatlakozott egy 195 cm magas játékos, így a csapattagok magasságának átlaga a korábbi átlagnál 0,5 cm-rel nagyobb lett. Pár nap múlva egy 202 cm magas játékos is a csapat tagja lett, emiatt a csapattagok magasságának átlaga újabb 1 cm-rel nőtt. Hány tagja volt a MAFKK-nak, és mekkora volt a játékosok magasságának átlaga a két új játékos csatlakozása előtt?

39. Noémi első egyetemi vizsgája három részből áll: egy projektmunkából, egy írásbeli dolgozathoz, valamint egy szóbeli feleletből. Mindhárom rész eredményét százalékban adják meg. A vizsga végeredményét egyetlen számmal jellemzik úgy, hogy kiszámolják a három rész százalékban megadott eredményének súlyozott számtani közepét: a projektmunka eredményét 2-es súllyal, az írásbeli dolgozat eredményét 5-ös súllyal, a szóbeli felelet eredményét 3-as súllyal veszik figyelembe. Noémi projektmunkája 73%-os, írásbeli vizsgája 64%-os lett.

a) Hány százalékra kell teljesítenie a szóbeli vizsgáját, hogy vizsgájának végeredménye legalább 70%-os legyen?

Az első évfolyam adatainak összesítésekor kiderült, hogy a 75 lány vizsgaeredményeinek átlaga 70%, a fiúk vizsgaeredményeinek átlaga 62% lett. A kollégiumban lakó 40 hallgató vizsgaeredményeinek átlaga 71%, a nem kollégistáké pedig 65% lett.

b) Hányan vizsgáztak összesen az első évfolyamról?

40. Egy középiskolában a tizedikesek évfolyamdolgozatot írtak matematikából. A dolgozatban maximum 100 pontot lehetett elérni. Az évfolyamra járó 80 tanuló közül a dolgozat megírásakor néhányan hiányoztak. A dolgozatokban elért pontszámok átlagát először úgy számították ki, hogy a hiányzó tanulók eredményét 0 pontként vették figyelembe. Rövid időn belül észrevették, hogy ez a számítási mód hibás. A hibát kijavították, így a hiányzók figyelembevétele nélkül kapott átlag 4,2

ponttal magasabbnak adódott, mint az első (hibás) számítás utáni átlag. Egy héttel később az első megírás alkalmával hiányzó tanulók pótolták a dolgozatot; az ő átlageredményük 64 pont lett (a pótdolgozatban is maximálisan 100 pontot lehetett elérni). A teljes tizedik évfolyam matematika-évfolyam-dolgozatainak átlageredménye így 67 pontos lett.

a) Hány tanuló hiányzott a dolgozat első megírásakor? Hány pont azoknak a tanulóknak a helyesen számolt átlageredménye, akik az első alkalommal megírták a dolgozatot?

III.

41. Egy cég három városban nyitott fiókot. A kőszegi fiókban dolgozók átlagéletkora 37 év, a tatabányai fiókban dolgozóké 23 év, a füredi fiókban dolgozóké pedig 41 év. Három alkalommal szerveztek tanulmányutakat a cégnél. Ezekben az utakon csak a cégnél dolgozók vettek részt, és mindenki elment azokra a tanulmányi utakra, amelyekre beosztották. Az egyes utakra a két-két kijelölt fiók minden munkatársát beosztották. Az első utat a kőszegi és a tatabányai fiók munkatársainak szervezték. Ezen az úton a résztvevők átlagéletkora 29 év volt. A második úton – amelyen a kőszegi és a füredi fiókban dolgozók vettek részt – a résztvevők átlagéletkora 39,5 év volt. A harmadik tanulmányúton a tatabányai és a füredi fiók munkatársai vettek részt. Ezen az úton a résztvevők átlagéletkora 33 év volt. Mennyi az átlagéletkora a cég összes dolgozójának?

XXIII. Valószínűségszámítás (B)

				134-145.	 -
--	--	--	--	----------	---------------

Binomiális eloszlás

I.

1. A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első gépsoron gyártott poharak közül 15-öt véletlenszerűen, visszatevéssel kiválasztva közöttük pontosan kettő lesz selejtes!

2. Egy üzemben négyzet alapú, egyenes hasáb alakú, felül nyitott sütőedények gyártását tervezik. Az edények külső felületét tűzálló zománccal festéssel vonják be. Minőségellenőrzési statisztikák alapján ismert: 0,02 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott edény selejtes. Egy áruházláncnak szállított 50 darabos tételben mekkora valószínűséggel lesz pontosan 2 darab selejtes?

3. Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld. Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

4. Egy dobozban 40 üvegyöngy között 8 selejtes van. Egy kísérlet abból áll, hogy a 40 gyöngy közül visszatevés nélküli mintavétellel, véletlenszerűen kiválasztanak 10-et, és megszámlálják, hogy hány selejtes van közöttük. Egy másik kísérletben ugyanebből a 40 gyöngyből visszatevéssel mintavétellel választunk ki 10 gyöngyöt. Ekkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában pontosan 2 selejtes gyöngy lesz?

5. Egy dobozban 6 fehér és 4 piros golyó van. A 10 golyó közül véletlenszerűen kiválasztanak 5 golyót. Egy tanuló ezt állítja: „Annak a valószínűsége, hogy az 5 kihúzott golyó között 2 fehér lesz, megegyezik annak a valószínűségével, hogy 4 fehér lesz közöttük.” A valószínűségek kiszámításával mutassa meg, hogy ha az 5 golyót visszatevéssel húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése nem igaz!

6. A Finom csokoládé csomagolásán az áll, hogy a tömege 100 g. A gyártó cég a saját megbízhatóságát így reklámozza: 99,9% annak a valószínűsége, hogy egy csokoládészelet tömege legalább 100 gramm. Ha a reklám állítása igaz, akkor legalább hány szelet Finom csokoládét kell (véletlenszerűen) vásárolnunk ahhoz, hogy legalább 0,05 valószínűséggel legyen közöttük 100 grammnál kisebb tömegű is? (Számításaiban a vásárlást modellezze visszatevéses mintavétellel!)

7. Az egyetem több ezer hallgatójának 60%-a fiú, 40%-a lány. (Ezt tekinthetjük úgy, hogy 0,6 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott hallgató fiú, és 0,4 annak a valószínűsége, hogy lány.)

b) Ha az egyetem büféjében egy asztalhoz véletlenszerűen ül le négy hallgató, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy több fiú van közöttük, mint lány?

Ha három lányhallgató találkozik véletlenszerűen, akkor 0,008 annak a valószínűsége, hogy mindegyikük rendszeresen sportol.

c) A lányok hányadrésze sportol rendszeresen?

II.

8. Egy urnában 5 azonos méretű golyó van, 2 piros és 3 fehér. Egyesével, és mindegyik golyót azonos eséllyel húzzuk ki az urnából a bent levők közül. Az eredeti golyókat tartalmazó urnából hatszor húzunk úgy, hogy a kihúzott golyót minden húzás után visszatesszük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hat húzásból legfeljebb kétszer húzunk piros golyót? (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekített értékkel adja meg!)

9. Az ulti nevű kártyajátékot magyar kártyával játsszák, melyben 4 szín (piros, tök, makk, zöld) és minden színben 8 lap (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász), összesen tehát 32 lap van. Dénes, Elemér és Fanni ultiznak: egy osztásnál mindhárom játékos (véletlenszerű elosztással) 10-10 lapot kap, a maradék 2 lap pedig az úgynevezett talonba kerül. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy osztásnál Elemérhez kerül valamelyik színből mind a 8 lap!

10. Csenge sokszor vásárol tojásokat a sarki üzletben. Megfigyelése szerint a tojások közül átlagosan minden ötvenedik törött. (Ezt úgy tekintjük, hogy a tojások mindegyike 0,02 valószínűséggel törött.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 10 tojást tartalmazó dobozban egynél több törött tojást talál Csenge?

11. Dani sportlövészedszetre jár, ahol koronglövészetet tanul. Az első félév végén kiderült, hogy még elég bizonytalanul céloz: húsz lövésből átlagosan ötször találja el a repülő agyagkorongot. (Tekintsük ezt úgy, hogy minden lövésnél $\frac{5}{20}$ az esélye annak, hogy Dani találatot ér el.) Mekkora annak az esélye az első félév végén, hogy nyolc egymás után leadott lövésből legalább háromszor célba talál? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

12. Egy kisüzemi meggymagozó-adagoló gép 0,01 valószínűséggel nem távolítja el a magot a meggyből, mielőtt a meggyiszemet az üvegbe teszi. A magozógépen áthaladt szemek közül 120-120 darab kerül egy-egy üvegbe. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott üvegben legalább 2 darab magozatlan szem van!

13. A Téglácska csokiszelet gyártója akciót indít: ha a szerencsés vásárló a csokiszelet csomagolásának belső oldalán a „Nyert” feliratot találja, akkor ezzel egy újabb szelet csokit nyert. A

gyártó úgy reklámozza a termékét, hogy „minden ötödik csoki nyer”. (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csoki 0,2 valószínűséggel nyer.)

a) Juli öt szelet csokoládét vásárol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt szelet csoki között legalább egy nyerő csoki lesz?

Pali is öt szelet csokoládét vásárolt, és végül hét szelet csokival tért haza a boltból, mert nyert még kettőt.

b) Vizsgálja meg, hogy a következő két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége!

I. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között két nyerő csoki lesz, de a két nyereménycsoki egyike sem nyer.

II. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között egy nyerő csoki lesz, a nyereménycsoki nyer egy hetedik szelet csokit, de az már nem nyer.

14. Egy matematika-vizsgafeladatban három állítás logikai értékét kell meghatározni (igaz vagy hamis). Három helyes válasz esetén 2, két helyes válasz esetén 1, kettőnél kevesebb helyes válasz esetén 0 pontot kap a vizsgázó. Béla tanult egy keveset, de bizonytalan a tudása: mindegyik kérdésnél 0,6 valószínűséggel találja el a helyes választ. Számítsa ki annak a négy eseménynek a valószínűségét, hogy Béla sikeres tippjeinek száma 3, 2, 1, illetve 0, és határozza meg Béla pontszámának várható értékét!

15. A kétszemélyes társasjátékban minden játszma csak valamelyik játékos győzelmével végződik, döntetlen nincs. Minden játszmában 1 pontot kap a győztes, a vesztes pedig 0 pontot. Anna és Bori nagyon szereti ezt a társasjátékot, sok játszmát lejátszottak már. Ha egymás ellen játszanak, akkor Anna 0,4 valószínűséggel, Bori pedig 0,6 valószínűséggel nyer meg egy játszmát. Egyik alkalommal megállapodnak, hogy addig játszanak újabb játszmákat, amíg valamelyikük először éri el a 10 pontot (és így megnyeri a játékot).

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Bori legfeljebb 12 játszma után megnyeri a játékot? (Kezdetkor mindkettőjüknek 0 pontja van.)

III.

6. Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll. A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük.

a) Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét!

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a reggeli munkakezdetkor egyik gép sem melegsik túl?

c) Igazolja a modell alapján, hogy (négy tizedes jegyre kerekítve) 0,0058 annak a valószínűsége, hogy a gépek túlmelegedése miatt a gyártósoron leáll a termelés a munkanap kezdetekor!

17. Egy újfajta, enyhe lefolyású fertőző betegségben a nagyvárosok lakosságának 5%-a betegszik meg. A betegek 45%-a rendszeres dohányos, a betegségben nem szenvedőknek pedig csak 20%-a dohányzik rendszeresen. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy nagyváros száz véletlenszerűen kiválasztott lakosa között legalább két olyan ember van, aki az újfajta betegséget megkapta? (Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!)

Hipergeometriai eloszlás

I.

18. Egy nemzetközi matematikai felmérésben egy magyarországi középiskola 9-12. évfolyamából 100 diák vett részt. Minden diák ugyanazt a feladatlapot kapta, és a feladatlapon található feladatok teljes megoldásával maximálisan 150 pontot érhetett el. A felmérést végző kutatóintézet kíváncsi volt a tanulók véleményére a feladatok nehézségét illetően. A 100 tanulóból véletlenszerűen választottak ki hármat, akiknek egy kérdőív kérdéseire kellett válaszolniuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 9-10. évfolyamról 2 tanulót, a 11-12. évfolyamról 1 tanulót választottak ki?

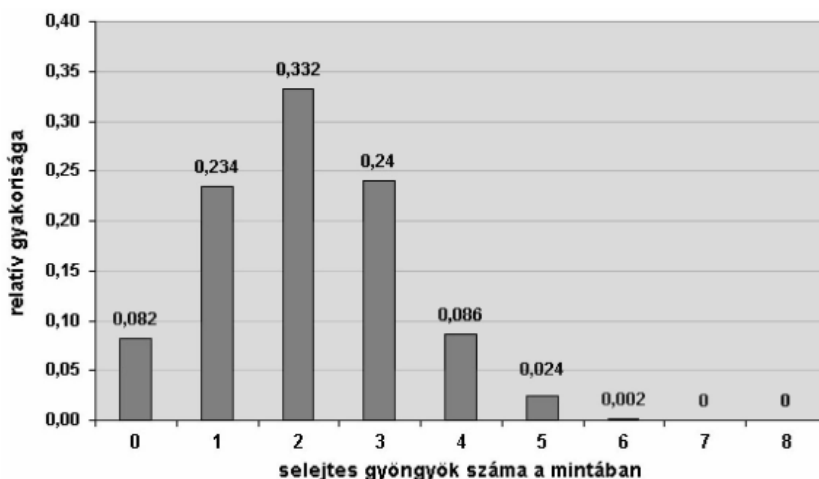
19. Kata kapott a születésnapjára Danitól 20 darab halat: 5 nagy pirosat és 15 kis csíkosat egy gömb-akváriumba. A két gyerek növényeket helyezett el Kata akváriumába, és ehhez egy befőttesüvegbe kis időre átraktak 8 darab halat. A halak „kihálászása” találmánrra történt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 8 átrakott hal között éppen 3 darab nagy piros hal volt?

20. Visszatevés nélkül kihúzzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű? Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

21. Szétgurult 20 darab tojás az asztalon. Közülük 16 tojás ép maradt, de 4 tojásnak alig észrevehetően megrepedt a héja. Bori ezt nem vette észre, így visszarakosgatja a tojásokat a két tojástartóba. Először a sárga tartóba tesz tízet, majd a fehérbe a többi. Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a 4 hibás tojás ugyanabba a tartóba kerül?

22. Egy dobozban 40 üvegyöngy között 8 selejtes van. Egy kísérlet abból áll, hogy a 40 gyöngy közül visszatevés nélküli mintavétellel, véletlenszerűen kiválasztanak 10-et, és megszámlálják, hogy hány selejtes van közöttük.

Egy tanulócsoporthoz tagjai összesen 500 alkalommal végezték el a fent leírt kísérletet. A kísérletek befejezése után összesítették a tapasztaltakat: a 10 elemű mintákban előforduló selejtes gyöngyök számának relatív gyakoriságát oszlopdiagramon ábrázolták.



Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kísérletet egyszer elvégezve a mintában pontosan 2 selejtes lesz! Állapítsa meg, hogy az eseménynek az 500 kísérletből kapott relatív gyakorisága hány százaléka a kiszámított valószínűségnek!

23. Egy dobozban 6 fehér és 4 piros golyó van. A 10 golyó közül véletlenszerűen kiválasztanak 5 golyót. Egy tanuló ezt állítja: „Annak a valószínűsége, hogy az 5 kihúzott golyó között 2 fehér lesz, megegyezik annak a valószínűségével, hogy 4 fehér lesz közöttük.” Mutassa meg, hogy ha a golyókat visszatevés nélkül húzzák ki, akkor a tanuló kijelentése igaz!

II.

24. Egy rendezvényre készülődve 50 poharat tesznek ki egy asztalra. A poharak között 5 olyan van, amelyik hibás, mert csorba a széle. Az egyik felszolgáló az asztalról elvesz 10 poharat, és ezekbe üdítőitalt tölt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legfeljebb 1 csorba szélű lesz a 10 pohár között!

25. Két közvélemény-kutató cég mérte fel a felnőttek dohányzási szokásait. Az egyik cég a véletlenszerűen választott 800 fős mintában 255 rendszeres dohányost talált, a másik egy hasonlóan véletlenszerűen választott 2000 fős mintában 680-at. a) Adja meg mindkét mintában a dohányosok relatív gyakoriságát! b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ha a fenti 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt, akkor éppen 1 dohányos van közöttük?

26. A 12. a osztály öt belépőjegyet kapott a vízilabda bajnokság döntőjére. Az osztály mind a harminc tanulója szívesen menne, bár közülük 12 tanulónak akkor különórája lenne. A választást a véletlenre bízzák: felírják a 30 nevet egy-egy cédulára, és ötöt kihúznak közülük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kisorsolt tanulók közül pontosan 2 olyan lesz, akinek különórája lenne? Az eredményt tizedestört alakban adja meg!

27. Marci a farsangi rendezvényre kibocsátott 200 darab tombolajegyből 4-et vásárolt. A tombolán 10 nyereménytárgyat sorsolnak ki. Minden tombolajeggyel legfeljebb egy tárgyat lehet nyerni.

b1) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Marci pontosan egy tárgyat nyer a tombolán?

b2) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Marci nyer a tombolán? Az eredményeket – a közbülsőket is – négy tizedesjegyre kerekítve számolja ki!

28. Az ulti nevű kártyajátékot magyar kártyával játsszák, melyben 4 szín (piros, tök, makk, zöld) és minden színben 8 lap (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász), összesen tehát 32 lap van. Dénes, Elemér és Fanni ultiznak: egy osztásnál mindhárom játékos (véletlenszerű elosztással) 10-10 lapot kap, a maradék 2 lap pedig az úgynevezett talonba kerül. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy osztásnál a talonba kerülő két lap különböző színű!

Geometriai valószínűség

II.

31. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza 8 cm, 15 cm és 17 cm. A háromszöglemez egy pontját véletlenszerűen kiválasztjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a pont mindegyik csúcstól legalább 3 cm távolságra lesz?

III.

30. Adott a $K(t) = t^2 + 6t + 5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x; y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x) + K(y) \leq 0$. A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3; -3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van?

31. Adott a síkbeli derékszögűkoordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1; -2)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg!

32. Az ABCD négyzet csúcsai: $A(0,0)$, $B(\frac{\pi}{2}, 0)$, $C(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $D(0, \frac{\pi}{2})$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belsőpontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyikpontja?

33. A derékszögűkoordináta-rendszerben adott egy téglalap, amelynek csúcsai: $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 1)$ és $D(0; 1)$. Véletlenszerűen kiválasztjuk a téglalap egy belső $P(x; y)$ pontját. Mennyi annak a valószínűsége, hogy $y \leq \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$?

Feltételes valószínűség

II.

34. A 12. osztály öt belépőjegyet kapott a vízilabda bajnokság döntőjére. Az osztály mind a harminc tanulója szívesen menne, bár közülük 12 tanulónak akkor különórája lenne. A választást a véletlenre bízzák: felírják a 30 nevet egy-egy cédulára, és ötöt kihúznak közülük. Tudjuk, hogy a kiválasztott öt tanuló között biztosan van olyan, akinek van különórája. Mennyi ekkor a valószínűsége annak, hogy pontosan két kisorsolt tanulónak van különórája?

35. A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak, amelyek külsőre mind egyformák. Az első gépsoron gyártott poharak 10%-a selejtes. A második gépsoron készült poharak 4%-a selejtes. Az összes pohár 60%-át az első gépsoron, 40%-át a második gépsoron gyártják, az elkészült poharakat összekeverik. Az elkészült poharak közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a pohár az első gépsoron készült?

36. Az ulti nevű kártyajátékot magyar kártyával játsszák, melyben 4 szín (piros, tök, makk, zöld) és minden színben 8 lap (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász), összesen tehát 32 lap van. Dénes, Elemér és Fanni ultiznak: egy osztásnál mindhárom játékos (véletlenszerű elosztással) 10-10 lapot kap, a maradék 2 lap pedig az úgynevezett talonba kerül. Ha tudjuk, hogy az osztáskor Fanni kapott legalább egy ászt, akkor határozzuk meg annak a (feltételes) valószínűségét, hogy mind a négy ász hozzá került!

37. Egy kereskedelmi forgalomban is kapható gyorsteszt azt ígéri a felhasználóknak, hogy a teszt kimutatja a vírusfertőzést. A termék leírásában ez áll: „A teszt a vírussal fertőzött embereknél 99% valószínűséggel mutatja ki a fertőzöttséget. A vírussal nem fertőzött emberek esetében olykor szintén fertőzöttséget jelez a teszt, ám ennek a téves jelzésnek a valószínűsége mindössze 4%.”

Tudjuk, hogy a város lakosságának 0,2%-a fertőzött a járványt okozó vírussal. Mutassa meg, hogy ha egy véletlenszerűen választott városlakó gyorstesztje fertőzöttséget mutat, akkor 0,05-nél kisebb annak a valószínűsége, hogy a tesztalany valóban vírusfertőzött (tehát a gyorsteszt nem a fertőzöttség megbízható kimutatására alkalmas)!

III.

38. Egy hűtőgépgyár - a garanciális panaszokkal foglalkozó osztály beszámolója szerint - 3%-os hibával dolgozik, azaz 100 hűtőgép közül 3 hibás. A hűtőgépgyár egy újfajta gyors eljárást dolgozott ki a gépek tesztelésére. Az eljárás a hibás gépek 98,8%-át kiszűri, de sajnos a hibátlan gépek 1,2%-át is hibásnak jelzi. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az eljárással hibásnak talált gép valóban hibás?

Várható érték

I.

39. Egy gyártósoron 8 darab gép dolgozik. A gépek mindegyike, egymástól függetlenül 0,05 valószínűséggel túlmelegszik a reggeli bekapcsoláskor. Ha a munkanap kezdetén 3 vagy több gép túlmelegszik, akkor az egész gyártósor leáll. A 8 gép reggeli beindításakor bekövetkező túlmelegedések számát a binomiális eloszlással modellezzük. Adja meg az eloszlás két paraméterét! Számítsa ki az eloszlás várható értékét!

II.

40. Egy új típusú sorsjegyből 5 millió darab készült, egy sorsjegy ára 200 Ft. Minden egyes sorsjegyen vagy a „Nyert” vagy a „Nem nyert” felirat található, és a nyertes sorsjegyen feltüntetik a nyertes szelvény tulajdonosa által felvehető összeget is. A gyártás során a mellékelt táblázat szerinti eloszlásban készült el az 5 millió sorsjegy.

b) Aki a kibocsátás után az első sorsjegyet megveszi, mekkora valószínűséggel nyer a sorsjegy áránál többet?

c) Számítsa ki, hogy ebben a szerencsejátékban az első sorsjegyet megvásárló személy nyereségének mennyi a várható értéke! (A nyereség várható értékének kiszámításához nemcsak a megnyerhető összeget, hanem a sorsjegy árát is figyelembe kell venni.)

sorsjegy (db)	nyeremény (Ft)
4	10.000.000
40	50.000
800	10.000
150.000	1.000
400.000	500
1.000.000	200
3.449.156	0

41. Egy iskola alapítványi bálján a korábban szokásos tombolahúzás helyett egy egyszerű lottóhúzást szerveznek. A szelvényt vásárolóknak az első tíz pozitív egész szám közül kell ötöt megjelölniük. Húzáskor öt számot sorsolnak ki (az egyszer már kihúzott számokat nem teszik vissza). Egy lottószelvény 200 Ft-ba kerül. Egy telitalálatos szelvénnel 5000 Ft értékű, egy négytalálatos szelvénnel 1000 Ft értékű, az alapítvány által vásárolt könyvtulványt lehet nyerni. Négynél kevesebb találatot elérő szelvénnel nem lehet nyerni semmit. Ha a húzás előtt 240 szelvényt adtak el, akkor mekkora az alapítvány lottóhúzásból származó hasznának várható értéke?

42. Egy fiókban három pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.) A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk. Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét!

43. Az összes sorsjegy 5%-a nyerő. Kétféle nyeremény van: 2500 Ft-os és 50 000 Ft-os. A 2500 Ft-os nyerő sorsjegyből pontosan 24-szer annyi van, mint az 50 000 Ft-osból. c) Töltse ki a következő táblázat üres mezőit, majd számítsa ki egy darab sorsjegy nyereményének várható értékét!

1 db sorsjegy nyereménye (Ft)	0	2500	50 000
nyeremény valószínűsége	0,95		

XXIV. Gráfok, logika

					 -
--	--	--	--	--	---------------

I.

1. a) Döntse el, hogy a következő négy állítás közül melyik igaz és melyik hamis!

A: Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfnak 15 éle van.

B: Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.

C: Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.

D: Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a foksámok összege 11.

b) Ha valaki sohasem hallott a gráfokról, és úgy tippeli meg, hogy A, B, C, D igaz-e vagy hamis, akkor mekkora valószínűséggel lesz helyes mind a négy válasza?

2. A Pécsre közlekedő vonat első osztályú fülkéjében hatan utaznak egy tudományos konferenciára. A vonat indulása után kiderül, hogy a hat ember között van kettő, aki mindenkit ismer az útitársak közül, a többiek pontosan négy-négy útitársat ismernek régebbről. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

a) Szemléltesse gráffal az ismeretségeket!

b) Az ismerősök a fülkébe lépve kézfogással köszöntötték egymást. Hány kézfogás történt?

3. Kilenc számkártya fekszik az asztalon: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Berci körbe rakta a kilenc számkártyát egy nagy papírra, és ha két szám között legalább kettő volt a különbség, akkor a két kártyát összekötötte egy vonallal. Összesen hány vonalat rajzolt meg így módon Berci?

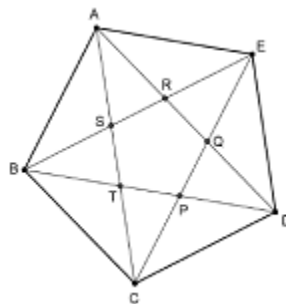
4. Kati megrajzolt egy olyan egyszerű teljes gráfot, amelynek 253 éle van, és csúcsai között szerepelnek egy trapéz A; B; C; D csúcsai is. Hány új gráfcsúcsot kellett ehhez felvennie? Legfeljebb hány éle törölhető ki ennek a teljes gráfnak, hogy még összefüggő maradjon?

5. Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis!

Adjon rövid magyarázatot válaszára!

1. állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.

2. állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amely nyolc élű kör.



6. Egy másik teljes gráfból 45 élt elhagyva egy fagráfot kaptunk. Hány pontja van ennek a gráfnak? (A teljes gráf olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontját él köti össze.)

7. Határozza meg a következő kijelentések logikai értékét (igaz-hamis)! Válaszeit indokolja!

I. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan foksámú.

II. Ha egy hétpontú egyszerű gráfnak 15 éle van, akkor a gráf összefüggő.

III. Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

8. Egy 9 pontú fagráfban ismerjük 8 pont foksámát: 1; 1; 1; 1; 2; 3; 3, 3. Határozza meg a kilencedik pont foksámát!

9. A H halmaz a nyolcpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik: ha egy (nyolcpontú egyszerű) gráf minden pontjának foksáma legalább 3, akkor a gráf összefüggő.

- a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
 b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

10. Legyen G egy nyolcpontú egyszerű gráf, amelynek összesen 9 éle van. Igazolja, hogy G csúcsai között biztosan van olyan, amelynek a fokszáma legalább 3.

11. Az A és C kijelentések logikai értéke igaz, a B kijelentés logikai értéke hamis. Határozza meg az állítások logikai értékét! (Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)

- (1) $\neg A \vee \neg B$
 (2) $(A \wedge B) \vee \neg C$
 (3) $B \rightarrow \neg A$
 (4) $\neg A \leftrightarrow B$
 (5) $A \rightarrow (B \wedge C)$

12. Ha $a|b$ igaz, akkor $a|b^2$ is teljesül (a és b pozitív egész számok). Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! ($a|b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.)

13. Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!
 Van olyan G_1 illetve G_2 fagráf, amelyre igaz, hogy a G_2 csúcsainak száma kétszerese a G_1 csúcsai számának, és a G_2 éleinek száma is kétszerese a G_1 élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.)

14. A gráf 9 élét kékre, 3 élét pedig zöldre színezzük. Igazolja, hogy bármelyik ilyen színezésnél lesz a gráfban egyszínű (gráfelméleti) kör!

15. Tudjuk, hogy az A , B , C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz?

16. Határozza meg az $(A \vee B) \rightarrow C$ állítás logikai értékét az A , B és C kijelentések különböző lehetséges logikai értékei esetén, és tölts ki ennek megfelelően az igazságtáblázatot! (Válaszait itt nem szükséges indokolnia.)

A	B	C	$(A \vee B) \rightarrow C$
i	i	i	
i	i	h	
i	h	i	
i	h	h	
h	i	i	
h	i	h	
h	h	i	
h	h	h	

17. a) Adottak az A , B , C kijelentések. Az A és B kijelentések logikai értéke igaz, a C kijelentés logikai értéke hamis. Határozza meg az állítások logikai értékét! (Válaszait itt nem szükséges indokolnia.)

- (1) $A \wedge C$
 (2) $\neg A \vee B$
 (3) $B \rightarrow C$
 (4) $(A \wedge \neg B) \vee C$

18. Jelölje meg annak az állításnak a betűjelét, amely tagadása a következő állításnak: „Bármely két magyar rendszám különböző.” A : Minden magyar rendszám egyforma. B : Van pontosan két egyforma magyar rendszám. C : Van legalább két egyforma magyar rendszám. D : Nincs két egyforma magyar rendszám.

19. Egy 8 pontú egyszerű gráfnak 13 éle van, és az egyik pontjának a fokszáma 6. Igazolja, hogy van hárompontú kör (gráfelméleti háromszög) a gráfban!

20.

a) Legyen a és b két pozitív valós szám. Határozza meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

„Ha $a > 6$ és $b > 8$, akkor a és b számtani közepe nagyobb 7-nél.”

b) Fogalmazza meg az előbbi állítás megfordítását, és határozza meg a megfordított állítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!

c) Határozza meg az x pozitív valós szám értékét úgy, hogy a 7-nek és az x -nek a harmonikus közepe 10 legyen!

d) Tudjuk, hogy az $(A \wedge \neg B) \wedge (A \vee \neg C)$ kijelentés logikai értéke igaz.

Mit lehet tudni az A , B és C kijelentések logikai értékéről? Tegyen **X**-et az alábbi táblázat megfelelő celláiba! (Válaszait itt nem kell indokolnia.)

	biztosan igaz	biztosan hamis	nem lehet eldönteni
A			
B			
C			

21. Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük az f , g , h és i függvényeknek.

Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvény értékkészletének van közös eleme. Rajzolja fel az így kapott gráfot! Válaszát itt nem kell indokolnia.

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto |x|$$

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2 + 2$$

$$h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \lg x$$

$$i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sin x$$

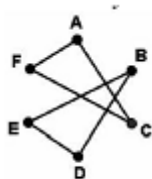
II.

22. a) Öt, egymástól távol eső tanya között kábeleket feszítenek ki, bármely két tanya között legfeljebb egyet. a) Elvileg összesen hány különböző hálózatot lehetséges létrehozni a tanyák között? (A hálózatban a kifeszített kábelek száma 0-tól 10-ig bármennyi lehet. Két hálózatot akkor tekintünk különbözőnek, ha van olyan összeköttetés, amely az egyikben létezik, de a másikban nem.)

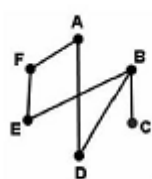
b) Takarékosági okokból csak 4 kábelt feszítenek ki úgy, hogy a hálózat azért összefüggő legyen. (Összefüggőnek tekintünk egy hálózatot, ha a kábelek mentén bármely tanyáról bármely másikba el lehet jutni, esetleg más tanyák közbeiktatásával.) Hány különböző módon tehetik ezt meg, ha az egyes tanyákat megkülönböztetjük egymástól?

23. Tekintsük a következő, egyszerű gráfokra vonatkozó állítást: Ha a gráf minden pontjának fokszáma legalább kettő, akkor a gráf biztosan összefüggő. a) Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás! Válaszát indokolja! b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása! Válaszát indokolja!

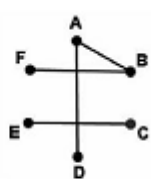
Tekintsük a következő halmazokat: $P = \{\text{összefüggő gráfok}\}$, $Q = \{\text{egyszerű gráfok}\}$, $R = \{\text{kört tartalmazó gráfok}\}$. c) Helyezze el a következő gráfok ábrájának sorszámát a mellékelt halmazábrában a megfelelőhelyre!



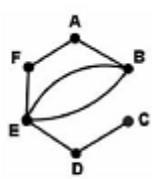
1. ábra



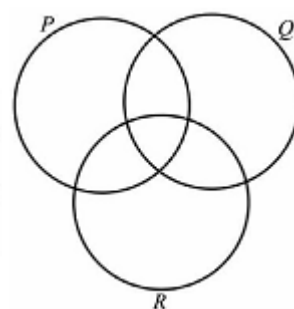
2. ábra



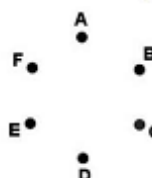
3. ábra



4. ábra



d) Rajzoljon egy 6 pontú fagráfot az 5. ábrára, és helyezze el ennek a sorszámát is a fenti halmazábrában a megfelelőhelyre!



5. ábra

24. Egy pedagógiai konferencia középiskolai szekciójába 12 fő jelentkezett. A 12 fős csoport két tagja (a moderátorok) a csoportból mindenkit ismertek. Öt olyan tagja volt a csoportnak, akik a moderátorokon kívül senkit sem ismertek; a szekció többi tagja közül pedig mindenki mindenkit ismert (az ismeretség minden esetben kölcsönös). Az első szekcióülés előtt, akik nem ismerték egymást, kézfogással bemutatkoztak egymásnak. Hány kézfogás történt?

25. Egy táncmulatságon 18 fiú és 15 lány vett részt. Az összejövetel végén összeírták, hogy kinek hány partnere volt (akivel esetleg többször is táncolhatott), s az eredményeket külön összesítették a fiúkra és külön a lányokra. Ezen két szám közül melyik lett a nagyobb? (Csak különneműek táncoltak egymással.)

26. Legfeljebb hány éle lehet egy 10 pontú nem összefüggő egyszerű gráfnak?

27. Igaz-e vagy hamis? a) Ha egy legalább kétpontú egyszerű gráf bármely két pontját pontosan egy út köti össze, akkor a gráf fa. b) Ha egy gráf körmentes és összefüggő, akkor az fa. c) Ha egy n pontú gráf körmentes és $n-1$ élű, akkor az fa. d) Ha egy n pontú gráf összefüggő és $n-1$ élű, akkor az fa.

28. Egy faluban van három ház (A, B és C), velük szemben három közműcsatlakozás (víz, gáz és áramszolgáltatás). Minden közművet minden házhoz be akarunk vezetni. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy egyik közműcsatlakozás sem halad át egy másik alatt vagy felett?

29. Tizenöt csapat körmérkőzéses bajnokságban vesz részt. 50 mérkőzést már lejátszottak. Igazoljuk, hogy van olyan csapat, amelyik már legalább 7 mérkőzést lejátszott!

30. Van-e olyan 9 pontú egyszerű gráf, amelyben mind a 9 pontnak más a foka?

31. Egy négy pontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztott négy élt kiszínezzük zöldre. (Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a zöldre színezett élek a gráf egy négy pontú körének élei!

32. Az A, B, C, D, E, F, G, H pontok egy szabályos nyolcszög csúcsai. Megrajzoljuk a nyolcszög oldalait és átlóit. A megrajzolt szakaszok közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy mind a négy kiválasztott szakasz az A csúcsból indul ki!

- 33.** A H halmaz a tízpontú egyszerű gráfok halmaza. A következő állítás a H elemeire vonatkozik:
Ha egy (tízpontú egyszerű) gráfnak legfeljebb 8 éle van, akkor nem tartalmaz kört.
b) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!
c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását a H elemeire vonatkozóan, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

Egy tízpontú teljes gráf élei közül véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. (Teljes gráf: olyan egyszerű gráf, melynek bármely két pontja között van él.)

- d) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a három kiválasztott él a gráfnak egy körét alkotja!

34. Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk” a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

- c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf!
d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan!

35. a) Határozza meg a következő két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!

I. Ha egy trapéznek 2-2 szöge egyenlő, akkor a trapéz húrtrapéz.

II. Ha egy háromszögben $a = b$, akkor $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$.

(A háromszög oldalai a , b és c , a velük szemközti szögek rendre α , β és γ .)

- b) Fogalmazza meg a **II.** állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!

36. Öt különböző számjegyet leírunk egy papírlapra. Két számjegyet pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha a különbségük páros szám (de egyik számjegyet sem kötjük össze önmagával). Így egy ötponstú gráfot kapunk.

- a) Határozza meg a következő két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja!

I. Lehetséges, hogy fagráfot kapunk.

II. Lehetséges, hogy nem összefüggő gráfot kapunk.

37. Megrajzoltuk az ABCDE konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az A, B, C, D, E pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű. Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki!

38. Egy nyomozás során fontossá vált felderíteni azt, hogy az A, B, C, D, E, F hattagú társaság mely tagja ismerik egymást, azaz milyen a társaság ismeretségi hálóját (ismeretségi gráfja). (Az ismeretség bármely két tag között kölcsönös. A társaság két ismeretségi hálóját akkor különböző, ha van két olyan tag, akik az egyik hálóban egymásnak ismerősei, de a másikban nem.) A nyomozás során az már bizonyítottá vált, hogy A-nak 5, B-nek 4, C-nek 3 ismerőse van a társaságban. Ennél többet azonban nem sikerült kideríteni, így aztán D, E és F egymás közötti ismeretségeiről sincs még semmilyen információ. a) Hányféle lehet a D, E, F csoport ismeretségi hálóját?

A friss bizonyítékok szerint a D, E, F csoportban mindenki ismeri a másik két személyt.

- b) Az összes eddigi (a korábban és a frissen beszerzett) információt figyelembe véve hányféle lehet az A, B, C, D, E, F hattagú társaság ismeretségi hálóját?

A további információk kiderítése érdekében a hattagú társaság tagjait 3 fős csoportokba szervezve hallgatják ki. Minden olyan 3 fős csoport kihallgatását megszervezik, amelyben A és B együtt nincs jelen. c) Összesen hány ilyen csoportos kihallgatást kell szervezni?

39. Egy hatfős baráti társaság tagjai András, Bori, Csaba, Dóra, Ervin és Fanni bajnokságon döntenek el, hogy ki a legjobb pingpongos közülük. Mindenki mindenki ellen egy mérkőzést játszik. Amikor 9 mérkőzést már lejátszottak, akkor kiderült, hogy mindegyikük páratlan számú mérkőzésen van túl. András az eddigi egyetlen meccsét Bori ellen játszotta, Csaba még nem játszott Ervin ellen. Játsozt-e már Dóra Fanni ellen?

40. Legyen G egy ötpontú fa gráf.

a) Lehetséges-e, hogy ekkor G komplementere is fa gráf?

Egy hatpontú teljes gráf pontjait megszámozzuk 1-től 6-ig. A gráf éleit ezután zöldre vagy pirosra színezzük a következő szabály szerint: két pontot összekötő él zöld lesz, ha a két ponthoz írt számok közül az egyik osztója a másiknak, egyébként pedig piros. A gráf pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk hármat.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott három pontot összekötő három él azonos színű

III.

41. a) A következő két állításról döntse el, hogy igaz vagy hamis. Válaszait indokolja! (1) Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van. (2) Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.

b) Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen beszínezzük hatot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf nem lesz összefüggő?

42. Az óvodai szekciónak három moderátora volt; ők mindenkit ismertek a csoportból. A csoport többi tagjának a fele a moderátorokon kívül senkit sem ismert, míg a csoport többi tagja közül itt is mindenki mindenkit ismert (természetesen az ismeretség itt is minden esetben kölcsönös). Ebben a szekcióban is bemutatkoztak egymásnak azok, akik nem ismerték egymást, s így ebben a csoportban harmincöt kézfogásra került sor. Hány főből áll az óvodai szekció?

43. Melyik igaz, melyik hamis? a) Ha egy n pontú gráfban az élek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, akkor a gráf teljes.

b) Ha egy n pontú egyszerű gráfban az élek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, akkor a gráf teljes.

c) Egy 5 csúcsú, egyszerű gráfnak nem lehet 11 éle.

d) A fokszámok egyértelműen meghatározzák a gráfot.

44. Nyolc sakkozó körmérkőzést játszik, két forduló már lejajlott. A versenyen lejátszott mérkőzéseket gráffal szemléltetjük. Igaz-e, hogy az így kapott gráfban mindig van kör?

45. Igaz-e vagy hamis? b) Az n pontú, $n-1$ élű összefüggő gráf fa. c) Ha egy gráf minden csúcsának a fokszáma legalább 2, akkor van benne kör. d) Ha egy egyszerű gráfban minden pont fokszáma 2, akkor a gráf kör. e) Ha egy összefüggő gráfban minden pont fokszáma 2, akkor a gráf kör. f) Ha egy n pontú összefüggő gráfnak n éle van, akkor a gráf kör. g) Van olyan nem összefüggő egyszerű gráf, melyben minden csúcs másodfokú. h) Ha egy összefüggő gráf tetszőleges körének egy élet elhagyjuk, akkor összefüggő gráfot kapunk. i) Ha egy összefüggő gráfból elhagyunk egy olyan élt, amely egyetlen körben sincs benne, akkor a gráf nem marad összefüggő. j) Ha egy n pontú gráfban bármely két pont között létezik út, akkor van olyan két pont, melyeket $n-1$ hosszú út köt össze ($n > 1$).

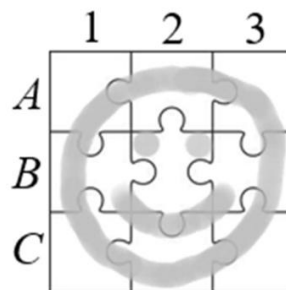
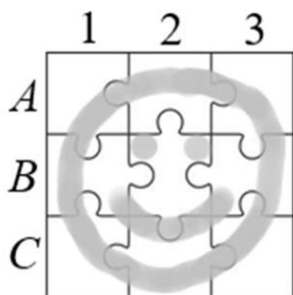
46. Nyolc sakkozót két csoportra kell osztani úgy, hogy az egyes csoportokon belüli körmérkőzéses versenyek során lejátszott mérkőzések együttes száma a legkevesebb legyen. Hogyan osztaná két csoportra a sakkozókat?

47. Egy öttagú társaság találkozik. Eddig már lezajlott nyolc kézfogás. Bizonyítsa be, hogy van legalább két ember, aki pontosan háromszor fogott kezet!

48. Egy hatfős társaság tagjai A, B, C, D, E és F. Mindenkit megkérdeztünk, hogy hány ismerőse van a többiek között (az ismeretség kölcsönös). A válaszként kapott hat természetes szám szorzata 180. Az is kiderült, hogy A-nak legalább annyi ismerőse van, mint B-nek, B-nek legalább annyi ismerőse van, mint C-nek, és így tovább, E-nek legalább annyi ismerőse van, mint F-nek. Szemléltesse egy-egy gráffal a lehetséges ismeretségi rendszereket!

49. Nyolc sakkozó részére egyéni bajnokságot szerveznek. Hányféleképpen készíthető el az első forduló párosítása, ha ebben a fordulóban mindenki egy mérkőzést játszik? (Két párosítást különbözőnek tekintünk, ha az egyik tartalmaz olyan mérkőzést, amelyet a másik nem.)

50. Az ábrán egy 3×3 -as kirakós játék (puzzle) sematikus képe látható. A kirakós játékot egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai ($A_1, A_2, \dots, C_3$) a puzzleelemeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő puzzle-elemek közvetlenül (egy oldalon) kapcsolódnak egymáshoz a teljesen kirakott képben.



- Rajzolja fel a kirakós játék gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a gráfban a fokszámok összegét!
- Igazolja, hogy a megrajzolt gráfban nincs olyan (gráfelméleti) kör, amely páratlan sok élből áll!
- A teljesen kirakott képen jelöljön meg a puzzle-elemek közül 7 darabot úgy, hogy a kirakósjáték általuk alkotott részlete (a részletnek megfelelő gráf) már ne legyen összefüggő!

- I. Másodfokú világ
- II. Egyenletek, egyenletrendszerek
- III. Egyenlőtlenségek
- IV. Függvények
- V. Sorozatok (A)
- VI. Halmazok
- VII. Exponenciális és logaritmikus világ
- VIII. Százalékszámítás
- IX. Sorozatok (B)
- X. Számelmélet, oszthatóság
- XI. Szöveges feladatok
- XII. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek
- XIII. Kombinatorika
- XIV. Valószínűesszámítás (A)
- XV. Síkgeometria
- XVI. Vektorok
- XVII. Trigonometria
- XVIII. Koordinátagéometria
- XIX. Differenciálszámítás
- XX. Térgeometria
- XXI. Integrálszámítás
- XXII. Statisztika
- XXIII. Valószínűesszámítás (B)
- XXIV. Gráfok

