

I. Az n-edik gyök

Emlékeztető: a negatív egész kitevőjű hatvány

1. Számítsuk ki! 5^{-2} 3^{-2} 2^{-5} 10^{-3} $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ $0,1^{-4}$

2. Negatív kitevő alkalmazásával írjuk fel törtmentes alakban a kifejezéseket!

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{27}$ $0,1$ $0,0001$ $0,01$ $0,04$ $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{25}$ $\frac{7}{16}$ $2,5$

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

$x^{-1} = 2$ $x^{-2} = 9$ $4^x = \frac{1}{4}$ $2^x = \frac{1}{4}$ $5^x = \frac{1}{125}$ $\frac{1}{2^x} = 16$ $5^{-x} = 25$ $0,1^x = 1000$

4. A hatványozás azonosságai alapján hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$x^2 \cdot x^{-3}$ $a^{-3} \cdot a^{-4}$ $a^{-2} \cdot a^{-\frac{1}{2}}$ $a^0 \cdot a^{-1}$ $b^{-2} \cdot b^4 \cdot b^{-3}$ $a^5 \cdot a^{-3} \cdot a^{-2}$ $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$

5. Alakítsuk át a kifejezéseket úgy, hogy ne tartalmazzanak negatív kitevőjű hatványt!

$a^{-2} \cdot b$ $3 \cdot a^{-5}$ $a^0 \cdot b^{-2}$ $2y^{-3}$ $\frac{a^{-1}}{b^{-1}}$ $\frac{a^{-2}}{b^{-3}}$ $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$ $\left(\frac{a}{x^2}\right)^{-1}$

Emlékeztető: műveletek négyzetgyökös kifejezésekkel

6. Végezzük el a következő műveleteket: $\sqrt{100 \cdot 49}$ $\sqrt{81 \cdot 400}$ $\sqrt{121 \cdot 64}$

7. Vigyük ki a gyökjel elé, amit lehet: $\sqrt{12}$ $\sqrt{54}$ $\sqrt{75}$ $\sqrt{108}$

8. A gyökkvonás elvégzése nélkül állapítsuk meg, a két szám közül melyik nagyobb:

$3\sqrt{5}$ $\sqrt{20}$ $4\sqrt{5}$ $\sqrt{80}$ $4\sqrt{8}$ $8\sqrt{2}$ $3\sqrt{2}$ $5\sqrt{0,5}$

9. Vigyük be a gyökjel alá a gyökjel előtt álló számot:

$3\sqrt{2}$ $4\sqrt{5}$ $2\sqrt{6}$ $1,2\sqrt{2}$ $3\sqrt{x}$ $5\sqrt{a}$ $7\sqrt{b}$ $x\sqrt{2}$ $a\sqrt{a}$ $b\sqrt{b^2}$ $x^2\sqrt{x}$

10. Végezzük el a következő műveleteket:

$\sqrt{12} - \sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt{48}$ $3\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{200}$ $2\sqrt{72} - \sqrt{50} - 2\sqrt{8}$

11. Írjuk egyszerűbb alakban a következő szorzatokat:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{72}$ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$ $\sqrt{30} \cdot \sqrt{20}$ $\sqrt{50} \cdot \sqrt{125}$ $\sqrt{20} \cdot \sqrt{72}$ $\sqrt{15} \cdot \sqrt{32}$

12. Végezzük el a következő műveleteket:

$$(\sqrt{2} + 3\sqrt{18} + 9\sqrt{50}) \cdot \sqrt{2} \quad (5 - 3\sqrt{2}) \cdot (5 + 3\sqrt{2})$$

$$(\sqrt{32} - \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{32} + \sqrt{12}) \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{18} - \sqrt{3})$$

13. Végezzük el a következő műveleteket: $12\sqrt{2} : 4$ $15\sqrt{5} : 5$ $6\sqrt{5} : 2\sqrt{5}$ $\sqrt{10} : \sqrt{5}$

14. Végezzük el a következő hatványozásokat:

$$(\sqrt{5})^2 \quad (2\sqrt{3})^2 \quad (5\sqrt{2})^2 \quad (\sqrt{2} + 1)^2 \quad (\sqrt{5} - 1)^2 \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \quad (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$$

15. Végezzük el a következő műveleteket!

$$(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})^2 \quad (\sqrt{12} - \sqrt{3})^2 \quad (\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}})^2 \quad (\sqrt{2 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{2 - 2\sqrt{3}})^2$$

$$(\sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{7}} - \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{7}})^2 \quad (\sqrt{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}})^2$$

Az n-edik gyök

16. Végezzük el a következő műveleteket: $\sqrt[3]{27}$ $\sqrt[3]{125}$ $\sqrt[4]{16}$ $\sqrt[4]{81}$

$$\sqrt[3]{64} \quad \sqrt[5]{32} \quad \sqrt[12]{1} \quad \sqrt[3]{0,0027} \quad \sqrt[3]{-1} \quad \sqrt[3]{-8} \quad \sqrt[5]{-32} \quad \sqrt[7]{-1}$$

17. Vigyük ki a gyökjel elé, amit lehet: $\sqrt[3]{16}$ $\sqrt[3]{54}$ $\sqrt[3]{72}$ $\sqrt[3]{81}$

$$\sqrt[4]{32} \quad \sqrt[4]{48} \quad \sqrt[5]{96} \quad \sqrt[5]{1215}$$

18. Vigyük a gyökjel alá a gyökjel előtt álló számot:

$$3 \cdot \sqrt[3]{3} \quad 3 \cdot \sqrt[3]{2} \quad 2 \cdot \sqrt[5]{3} \quad \frac{1}{2} \sqrt[3]{4} \quad 2 \cdot \sqrt[4]{2} \quad 5 \cdot \sqrt[3]{1} \quad 0,1 \cdot \sqrt[4]{1000} \quad \frac{1}{3} \sqrt[5]{243}$$

19. Végezzük el a következő műveleteket! $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ $\sqrt[3]{125}$ $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$ $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$

$$\sqrt[3]{24 \cdot 9} \quad \sqrt[4]{54 \cdot 24} \quad \sqrt[3]{75 \cdot 45} \quad \sqrt[3]{0,001 \cdot 125}$$

$$\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{10} \quad \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{36} \quad \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{20} \quad \sqrt[4]{50} \cdot \sqrt[4]{200}$$

20. Végezzük el a következő műveleteket!

$$\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[4]{64} : \sqrt[4]{4} \quad \sqrt[3]{100000} : \sqrt[3]{100} \quad \sqrt[3]{0,04} : \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[3]{\frac{9}{8}} : \sqrt[3]{\frac{8}{9}} \quad \sqrt[3]{64a^4} : \sqrt[3]{2a} \quad \sqrt[4]{3x^5} : \sqrt[4]{x} \quad \sqrt[3]{0,001} : \sqrt[3]{125}$$

21. Írjuk át egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket!

$$(\sqrt[3]{2})^4 \quad (\sqrt[3]{4})^3 \quad (\sqrt[5]{3})^3 \quad (\sqrt[4]{4})^2 \sqrt[3]{\sqrt{2}} \quad \sqrt[5]{\sqrt{3}} \quad \sqrt{\sqrt[3]{7}} \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$$

22. Végezzük el a következő műveleteket!

$$(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}) \quad (\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \quad (\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{16})(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4})$$

23. Írjuk át egyszerűbb alakba a következő kifejezéseket!

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} \quad \sqrt[3]{\sqrt{a^2b}} \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4b}} \quad \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{3}} \quad \sqrt[5]{2 \cdot \sqrt{2}} \quad \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[5]{25}} \quad \sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} \quad \sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a}}$$

24. Írjuk át kisebb gyökkitevővel a következő kifejezéseket:

$$\sqrt[4]{36^2} \quad \sqrt[6]{25^3} \quad \sqrt[9]{27^3} \quad \sqrt[4]{4} \quad \sqrt[4]{100} \quad \sqrt[8]{16}$$

25. Vigyük a gyökjel alá az előtte álló számokat, kifejezéseket:

$$5 \cdot \sqrt[3]{5} \quad 3\sqrt[3]{2} \quad 2\sqrt[5]{3} \quad a \cdot \sqrt[3]{b} \quad -b \cdot \sqrt[3]{b} \quad a^2 \cdot \sqrt[3]{ab}$$

26. Írjuk fel egyetlen gyökjel alkalmazásával a következő kifejezéseket!

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{4} \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{5} \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a} \quad \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$$

27. Határozzuk meg ezen szám előjelét: $\sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

28. Hozzuk egyszerűbb alakra: $\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}$

II. Exponenciális és logaritmikus világ

A törtkitevőjű hatvány

1. Számítsuk ki a következő hatványok értékét: $100^{\frac{1}{2}}$ $8^{\frac{1}{3}}$ $81^{\frac{3}{4}}$ $0^{\frac{4}{9}}$ $27^{-\frac{1}{3}}$ $8^{-\frac{2}{3}}$ $32^{\frac{4}{5}}$ $16^{1,5}$

2. Írjuk fel gyökjellel a törtkitevőjű hatványokat: $3^{\frac{1}{7}}$ $7^{\frac{5}{3}}$ $2^{\frac{2}{3}}$ $6^{\frac{1}{3}}$ $5^{\frac{1}{4}}$ $x^{\frac{7}{8}}$ $a^{\frac{5}{3}}$ $8^{\frac{1}{3}}$

3. Alakítsuk át a kifejezéseket úgy, hogy ne legyen bennük se negatív kitevő, se törtkitevő:

$$ab^{-2} \quad \frac{b^{-2}}{a^{-3}} \quad \frac{1}{x^{-\frac{2}{3}}} \quad a^{\frac{1}{2}}$$

4. Írjuk fel törtkitevővel a gyökös kifejezéseket: $\sqrt{a}$ $\sqrt[3]{a^2}$ $\sqrt[4]{2^3}$ $\sqrt[6]{5^2}$ $\sqrt[9]{10^3}$

5. Számítsuk ki a kifejezések pontos értékét számológép nélkül:

$$27^{\frac{1}{3}} \quad 81^{\frac{3}{4}} \quad 4^{\frac{1}{2}} \quad 16^{\frac{1}{2}} \quad 4^{\frac{3}{2}} \quad 8^{\frac{2}{3}} \quad \frac{3}{2^{-4}} \quad 0,1^{-1}$$

$$0,25^{\frac{1}{2}} \quad 16^{-0,25} \quad \frac{1}{4^{\frac{-1}{2}}} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad \sqrt{(-11)^2} \quad 0,25^{\frac{3}{2}} \cdot 16^{1,5}$$

6. Számítsuk ki a kifejezések pontos értékét számológép nélkül:

$$8^{\frac{1}{3}} \quad 4^{\frac{5}{2}} \quad 25^{\frac{1}{2}} \quad 27^{\frac{-2}{3}} \quad 32^{\frac{3}{5}} \quad 9^{\frac{3}{2}} \quad 9^{0,5} \quad 16^{-0,25} \quad 81^{0,75} \quad 36^{1,5} \quad 4^{-2,5} \quad 49^{-1,5}$$

7. A következő kifejezéseket úgy alakítsd át, hogy ne tartalmazzanak gyökjelet:

$$\sqrt[3]{x^2} \quad \sqrt[4]{a^3} \quad \sqrt{a^5} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^5}} \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}$$

8. Az alábbi kifejezéseket úgy alakítsd át, hogy sem negatív, sem törtkitevőt ne tartalmazzanak:

$$x^{\frac{2}{3}} \quad a^{\frac{3}{4}} \quad b^{\frac{1}{4}} \quad (3a)^{\frac{2}{3}} \quad 3a^{\frac{2}{3}} \quad c^{\frac{1}{3}}$$

Számítsuk ki a hatványozás azonosságai felhasználásával gép nélkül:

9. $8^{\frac{2}{3}} \quad 2^{\frac{3}{2}} \quad 5^{\frac{3}{4}} \quad 3^{\frac{1}{2}}$

10. $4^{\frac{3}{2}} \quad 8^{\frac{2}{3}} \quad 8^{\frac{70}{105}} \quad 16^{1,25} \quad 27^{\frac{1}{3}}$

11. $27^{\frac{-2}{3}} \quad 16^{\frac{3}{4}} \quad 32^{-0,4} \quad 0,001^{\frac{-2}{3}} \quad 0,25^{\frac{5}{2}} \quad 0,25^{\frac{-5}{2}} \quad 4^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{9}} \quad 3^{0,4} \cdot 9^{1,8}$

12. $81^{3,25} \quad 25^{\frac{20}{12}} \quad \frac{20^{2,5}}{5^{1,5}}$

13. $9^{-2} \quad 9^{\frac{1}{2}} \quad 9^{\frac{1}{2}} \quad \left(-\frac{1}{9}\right)^{-2} \quad \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{-1}{2}} \quad \left(-\frac{1}{9}\right)^{\frac{-1}{2}}$

14. Végezzük el a műveleteket, az eredményt a legegyszerűbb alakban írjuk:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \quad a \cdot a^{\frac{2}{3}} \quad a^n \cdot a^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt[3]{a^2} \quad a^{-4} \cdot a^{\frac{2}{3}} \quad a^{\frac{-2}{3}} : a^{\frac{5}{6}} \quad \left(\frac{a^2}{a^0}\right)^{\frac{1}{4}}$$

15. Végezzük el a műveleteket: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \quad 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}} \quad 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \quad 7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{4}{3}}$

Exponenciális egyenletek

16. Oldjuk meg az egyenleteket a racionális számok halmazán: $3^{5x-3} = 81 \quad 2^{5x-3} = 16$

$$3^{4x-5} = 729 \quad 4^x = 32 \quad 4^{\frac{1}{x}-2} = \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x} = 9$$

17. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

$$3 \cdot 2^x = 96 \quad 2^{2x-3} = 16 \quad 3^{x^2-4x+3} = 1 \quad 16^{\frac{x-8}{x+3}} = 256$$

18. Oldjuk meg az egyenleteket a racionális számok halmazán:

$$2^{x+3} - 2^x = 112$$

$$10^x + 10^{x-1} = 0,11$$

$$2^{x+2} + 2^{x-2} = 34$$

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 896$$

$$2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$$

19. Oldjuk meg az egyenleteket a racionális számok halmazán:

$$3^x + 3^{x+1} = 12$$

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 28$$

$$0,5^{2x-2} \cdot 2^{x^2} = 32$$

20. Oldjuk meg az egyenleteket:

$$7^{x+1} + 2 \cdot 7^x - 7^{x-1} = 434$$

$$9^{\sqrt{x}} = 3^{x-3}$$

$$2^{3x^2-1} = 4^x$$

$$2^{x-3} + 2^x = 18$$

21. Oldd meg a következő exponenciális egyenleteket:

$$7^{x+1} - 6 \cdot 7^x - 5 \cdot 7^{x-1} = 14$$

$$3^{x-2} + 4 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 4$$

$$3^x - 3^{x-2} = 24$$

22. Oldd meg az egyenleteket:

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 65$$

$$3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x-1} + 2^{x+1} = 25$$

$$23. 4^x + 2^x = 30$$

$$9^x + 8 = 2 \cdot 3^{x+1}$$

$$2^{-4x} = \frac{1}{4}$$

$$24. 5^{x^2-8x+12} = 1$$

$$4^x = 8^{2x-1}$$

$$2^{x^2-7x+12} = 1$$

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{\sqrt{x+2}} = 0,5$$

$$25. 7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$$

$$4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$$

$$2^{x^2-7x+12} = 1$$

$$26. 2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$$

$$4 \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+1} - 25 = 0$$

$$27. 5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$$

$$3^{2x+2} - 12 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$$

$$5^x + \frac{125}{5^x} = 30$$

$$28. 10^x - 10^{-x} = \frac{8}{3}$$

$$4^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$$

$$9^{x-1} + 3^{x+2} = 90$$

$$29. 0,5^{\frac{1}{2x+3}} = 4^x$$

$$5^{2x+1} = 2 \cdot 6^{x-1}$$

$$6 \cdot 3^{2x+1} - 9^{x+1} = 15$$

$$30. 8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30$$

$$2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$$

$$31. 3^{\sin x} = 2$$

$$2 \cdot 4^{x+1} + 2^{x-1} - 4^x = 2^{x+2} + 21$$

$$32. 5^x = 5^{x-1} + 4^x + 2^{2x-2}$$

$$\sqrt[3]{9^{x+1}} = (3 \cdot 27^x)^{x+1}$$

$$8^x \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} + 288 = 0$$

$$33. 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x-1}$$

$$6^{2-x} - 10 = 4 \cdot 6^x$$

$$34. 6^{2x+1} \cdot 2^{x^2} = 9^x \cdot 24$$

$$2^{x-3} + 3 \cdot 0,5^{x+1} = 1$$

$$\frac{1}{3^x - 1} - 3^{-x} = (9^x - 3^x)^{-1}$$

$$35. (x-3)^{x^2-3x} = (x-3)^{8x-30}$$

$$25^{\sqrt{x+1}+3} + 6 = 5^{\sqrt{x+1}+4}$$

36. Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán:

$$5^{|x|-4} = \frac{1}{125}$$

$$\frac{1}{8} \sqrt[3]{2^{x+1}} = 0,5$$

$$27 \cdot 9^{x-4} = \sqrt[4]{3^{2x+1}}$$

37. Oldjuk meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán:

$$\begin{aligned} 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 3^{x-1} &= 20 & 5^{x+2} + 3 \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{x+1} &= 18 \\ 4^{x+1} + 3 \cdot 4^x - 2 \cdot 4^{x-1} &= 13 & 8^{\frac{x}{3}+1} - 4^{\frac{x}{2}-1} &= 64 \end{aligned}$$

38. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1} + \sqrt{4^x + 2^{x+1} + 1} = 2$$

Exponenciális függvények

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

39. $f(x) = 2^x$ $g(x) = 10^x$ $h(x) = 3^x - 1$ $i(x) = 2 \cdot 10^x$

40. $f(x) = 3^x$ $g(x) = 4^x$ $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $i(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

41. $f(x) = 2^{x-1}$ $g(x) = 3^x + 2$ $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$ $i(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^x$

A logaritmus fogalma

42. Írjuk fel hatványalakban: $\lg 100 = 2$ $\lg 10 = 1$ $\lg 0,01 = -2$ $\lg 2 = 0,3010$

$$\log_3 9 = 2 \quad \log_5 125 = 3 \quad \log_{10} \frac{1}{10} = -1 \quad \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 \frac{1}{64} = -6 \quad \log_{\frac{1}{3}} 81 = -4 \quad \log_{\sqrt{2}} 8 = 6$$

43. Írjuk fel logaritmussal a következő egyenlőségeket:

$$10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000 \quad 10^{-1} = \frac{1}{10} \quad 2^3 = 8 \quad 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \quad 3^{-3} = \frac{1}{27} \quad 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

44. Írjuk fel logaritmussal: $3^3 = 27$ $2^4 = 16$ $6^3 = 216$ $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

45. A következő kifejezéseket írd fel egyszerűbb alakban:

$$2^{\log_2 5} \quad 7^{\log_7 9} \quad 8^{\log_8 3} \quad 10^{\lg 4} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6} \quad 10^{\lg 7}$$

46. Mivel egyenlő? $\log_2 8$ $\log_2 32$ $\log_2 1024$ $\log_2 0,5$

$$\log_2 1 \quad \log_2 (-1) \quad \log_2 \frac{1}{8} \quad \log_2 \sqrt{2}$$

47. Számítsd ki:

$$\log_7 49 \quad \log_3 81 \quad \lg 100 \quad \log_5 5 \quad \log_6 1 \quad \log_5 0 \quad \log_4 2 \quad \log_8 4$$

48. Számítsd ki:

$$\log_9 \sqrt{3} \quad \log_{0,2} 0,04 \quad \log_{0,5} 4 \quad \log_{\sqrt{5}} 5 \quad \log_{\frac{1}{3}} 3 \quad \log_4 \sqrt[3]{4} \quad \lg 1 \quad \lg 0,1$$

49. Határozzuk meg a következő logaritmusos kifejezéseket számológép nélkül a definíció alapján:

$$\log_2 8 \quad \log_2 64 \quad \log_2 \frac{1}{4} \quad \log_3 \sqrt{3} \quad \lg 100000 \quad \lg 0,0001 \quad \lg \sqrt{1000}$$

50. A logaritmus fogalma segítségével írd át más alakba a következő egyenlőségeket:

$$2^3 = 8 \quad 3^2 = 9 \quad 5^4 = 625 \quad 4^{\frac{1}{2}} = 2 \quad 16^{\frac{1}{4}} = 2 \quad 64^{\frac{2}{3}} = 16$$

51. A logaritmus fogalma segítségével írd át más alakba a következő egyenlőségeket:

$$5^{-1} = \frac{1}{5} \quad 8^{-2} = \frac{1}{64} \quad 7^0 = 1 \quad 4^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \quad 81^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$$

52. Határozd meg az alábbi logaritmusok értékét:

$$\begin{array}{ccccc} \log_4 16 & \log_3 9 & \log_7 7 & \log_2 32 & \log_2 \frac{1}{8} \\ \log_5 \frac{1}{25} & \log_8 1 & \log_4 2 & \log_9 \frac{1}{81} & \log_9 3 \end{array}$$

53. Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

$$\lg(-x) \quad \lg x^2 \quad \lg(-x)^2 \quad \lg \frac{1}{x} \quad \frac{1}{\lg x} \quad \log_x(1-x) \quad \frac{1}{\lg(2-x)} \quad 5^{\lg x}$$

54. Határozzuk meg a következő logaritmusokat a definíció alapján:

$$\log_2 \sqrt{2} \quad \log_3 \sqrt[3]{81} \quad \log_2 \sqrt[7]{64} \quad \log_5 \sqrt[4]{125}$$

55. Mely valós x-ekre értelmezhetők a kifejezések?

$$\sqrt{5^x - 125} \quad \frac{\lg x}{\lg(4-x)} \quad \log_x(6-x-x^2) \quad \frac{1}{\lg \sin x}$$

A logaritmus azonosságainak alkalmazása

Az 56-80. feladatokban kitűzött számításokat számológép nélkül végezzük el.

56. $\lg 2 + \lg 3 = \lg x \quad \log_3 5 + \log_3 7 = \log_3 x$

57. $10^{\lg 3 + \lg 5} \quad 4^{\log_4 7 + \log_4 9}$

58. $\lg 18 - \lg 3 = \lg x \quad \lg 36 - \lg 12 = \lg y \quad \log_7 35 - 1 = \log_7 z \quad \log_2 80 - 3 = \log_2 x$

59. $10^{-\lg 2} \quad 5^{-\log_5 9}$

60. $3 \lg 2 = \lg x \quad 7 \lg 5 = \lg y \quad \frac{\lg 81}{4} = \lg z \quad 2 \log_6 7 = \log_6 x \quad \frac{\log_7 4}{3} = \log_7 y$

61. $\lg 4 + \lg 25 \quad \lg 150 + \frac{\lg 3 + \lg 12}{2} - \lg 9 \quad \frac{\lg 125}{3} - \lg 0,5$

62. $\log_{15} 25 + \log_{25} 35 - \log_{25} 21 \quad \frac{\lg 9 + 2 \lg 2}{\lg 6}$

63. $3^{\log_3 7} \quad 4^{\log_2 3} \quad 2^{\log_4 5} \quad 10^{1-\lg 2,5} \quad 10^{-\lg 5} \quad 10^{\lg 6 + \lg 5} \quad 25^{\log_5 3} \quad 36^{\log_6 2} \quad 81^{\log_3 2}$

64. $10^{\lg 2} \quad 3^{\log_3 81} \quad 4^{\log_4 \frac{1}{2}} \quad 5^{\log_5 a}$

$$65. 10^{2\lg 3} \quad 10^{1+\lg 3} \quad 3^{1+\log_3 4} \quad 5^{1-\log_5 3} \quad 6^{\frac{1}{2}\log_6 81} \quad 2^{\log_4 10} \quad 10^{1-\lg 2} + 3^{\log_9 36}$$

$$66. 3^{1+\log_3 5} \quad 4^{2+\log_4 3} \quad 2^{1+4\log_2 3} \quad 4^{2-\log_4 5} \quad 5^{\log_5 3+\log_5 2} \quad 6^{\log_6 7-\log_6 2}$$

$$67. \log_{0,25} 2 \quad 10^{\lg 3} \quad 5^{\log_5 7} \quad 10^{1+\lg 4} \quad 10^{2\lg 3} \quad 9^{\log_3 2} \quad 2^{\log_4 25} \quad \log_{8\sqrt{2}} 16 \quad \log_{3\sqrt[3]{3}} 9$$

$$68. 16^{\frac{-3}{4}} \quad \log_{0,04} 125 \quad \lg \sqrt{44} + \frac{1}{2} \lg 275 - \lg 11 \quad 5^{1+2\log_5 6}$$

$$69. 2^{\log_2 7} \quad 4^{\log_2 5} \quad 2^{\log_2 9+1} \quad 2^{2\log_2 3} \quad (\log_2 10 + \log_2 1,6) \quad \log_2 5 + \log_2 6,4$$

$$70. 10^{2\lg 3+1} \quad 10^{\frac{1}{2}\lg 25-1} \quad 7^{\frac{1}{2}\log_7 25-1} \quad 6^{\frac{1}{3}\log_6 8+3} \quad a^{\frac{1}{3}\log_a 8+2}$$

$$71. 5^{-1} \cdot 3^{\log_3 8} \cdot \lg \sqrt[5]{1000} \quad 7^{7\log_7 2-\log_7 5} \quad \lg \sqrt[10]{10} \cdot \log_5 \sqrt[3]{25}$$

$$73. 3^{\log_3 15} \quad 10^{\lg 6} \quad 10^{\log_3 5} \quad 4^{\log_{16} 81} \quad 7^{1+\log_{49} 8} \quad 25^{\frac{1}{2}-\log_5 3}$$

$$74. 0,25^{4,5} \quad \log_{3\sqrt{3}} 9 \quad \log_9 3\sqrt{3} \quad \frac{\lg 5 + \lg 2}{\lg 6} \cdot (\lg 4 + \lg 9) \quad 100^{2+\lg 4} \quad \frac{5^{\lg 20}}{2^{\lg 5}}$$

$$75. 27^{\frac{2}{3}} \quad \log_{0,25} 32 \quad \frac{1}{2} \cdot \lg 52 + 3\lg 2 + \lg 125 + \frac{1}{2} \lg 325 - \lg 13 \quad 3^2 - \frac{2}{3} \cdot \log_3 8$$

76. Adott $\lg 40 = b$. Fejezzük ki $\lg 20$ -at b -vel.

$$77. \frac{1}{2} \log_3 45 + \log_3 \sqrt{20} - \log_3 30 + 2\log_9 6 - \log_3 2 \quad 4^{3(\log_{16} 9)-2} \quad 100000^{-1,2} \quad \log_{3\sqrt[3]{27}} 9$$

78. Fejezzük ki $\lg 15$ -öt p és q segítségével, ha $p = \lg 75$ és $q = \lg 45$

$$79. \left(\frac{16}{81}\right)^{1,25} \quad \log_5 7 + \log_{0,2} 7 \quad \log_8 3 \cdot \log_3 2 \quad 8^{2\log_2 5-1} \\ \lg \sin 30^\circ \cdot \lg \sin 60^\circ \cdot \lg \tan 45^\circ$$

$$80. \log_5 15 + \log_5 35 - \log_5 21 \quad 3\log_3 6 + \log_3 35 - \log_3 20 - \log_3 42 \\ \lg \sqrt{11} - \frac{1}{2} \lg 55 - \lg \sqrt{5} + \lg 500$$

Logaritmusos egyenletek

Oldd meg az egyenleteket:

$$81. \log_3 x = -1 \quad \log_4 x = \frac{1}{2} \quad \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2} \quad \log_9(x+3) = 0 \quad \log_{\frac{1}{4}}(x+1) = -2$$

$$82. \log_x(2x+4) = 1 \quad \log_{x+3}(6x-2) = 0 \quad \log_{x-2}(2x-1) = 2$$

$$83. -\lg 6 = \lg x \quad -\log_4 6 = \log_4 x$$

$$84. \lg(x+2) + \lg x = 1 \quad \lg(x+1) = -\lg x \quad \log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 2$$

$$85. \log_5 x = 3 \quad \log_{16} x = 1,25 \quad \log_x 4 = -\frac{1}{2}$$

$$86. \log_x(4x+12) = 2 \quad \log_x 3x^2 = 5 \quad \lg^2 x + \lg x = 0$$

$$87. \log_2 x = 4 \quad \log_2(x^2-1) = 3 \quad \lg(x+1) - \lg x = 1 \quad \lg x^3 + \lg^2 x = 10$$

$$88. \lg x^2 = \lg^2 x \quad \lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) = 2 - \lg 25 \quad \frac{\lg(x+2)}{\lg x} = 2$$

$$89. \frac{\lg(2x+1)}{\lg(x-1)} = 2 \quad \frac{\lg(x^2-20)}{\lg(x+10)} = 1 \quad 2 - \lg x = \lg 2 + \lg 4 + \lg 25$$

$$90. \lg 2 + \lg x = \lg(x+3) \quad \lg(x-9) + \lg(2x+1) = 2 \quad \lg(x-4) + \lg(x+3) = \lg(5x+4)$$

$$91. \lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5 \quad \frac{\lg x}{\lg x - \lg 2} = 3$$

$$92. \log_2 x + \log_8 x = 8 \quad \log_2 x + \log_4 x = 1$$

$$93. \log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7 \quad \log_4 x + \log_x 4 = 2 \quad \log_4 x + \log_x 4 = \frac{5}{2}$$

$$94. \lg(3x-1) = \lg(x+1) \quad \lg x^2 = \lg x \quad \lg x^2 = \lg(-x) \quad \lg x = \lg 3 + \lg 4$$

$$95. \frac{\lg 24 - \lg 12}{2} = \lg x \quad \lg(2x+1) = \lg 8 + \lg x \quad \lg(2x+1) + \lg x = \lg 3$$

$$96. \frac{\lg_3 x}{1 - \log_3 2} = 2 \quad \frac{2 \lg x}{\lg(5x-4)} = 1 \quad \lg x^2 = \lg^2 x \quad \log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1$$

$$97. \lg \frac{x}{2} = 2 - \lg 25 \quad \frac{\lg(x+1)}{\lg x} = 2 \quad \frac{\lg(2x+10)}{2} = \lg(x+1)$$

$$98. \lg(x+9) + 2 \lg \sqrt{2x-1} = 2 \quad \log_2 x - \log_{0,5} x = 8 \quad 3 \log_5 x + \log_{25} x = 7$$

99. $\log_2 x + \log_4 x = 12$ $\log_3(x+1) - 1 = \log_9(x-1)$ $\log_x 4 + 2 \cdot \log_4 x = 3$
100. $\lg(x+1) = \frac{\lg(6-2x)}{2}$
101. $2\lg(x-4) - \lg 4 = \lg(2x-11)$ $\frac{\lg(3x-5)}{\lg(2x-3)} = 1$ $\frac{\lg(3x-5)}{\lg(2x-3)} = 2$
102. $\log_3(x+1) = -1$ $\lg \lg x = 0$ $\lg x + \lg 4 = 1$ $\log_5 x + \log_5 4 = 1$
103. $\lg^2(x-1) = 4$
104. $\log_7(x^2 + x + 7) = 2$ $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$ $\log_3(x+2) - \log_3(x) = 1$
105. $\lg^2 x = 3 \cdot \lg x$ $\log^2_6 x = 3 \cdot \log_6 x$
106. $\log_{(x-3)}(x+3) = 2$ $\lg x + \lg(x+3) = 3 - 2 \cdot \lg 5$ $\lg \sqrt{x} = \sqrt{\lg x}$
107. $\log^2_3 x = \log_3 x + 2$
108. $\frac{1}{2} \cdot \log_3(2x+1) + \log_3 \sqrt{3x-3} = \lg 100$ $\log_4(x^2 - 2x + 1) + 2 \cdot \log_4(2x) = 2$
109. $\log_x(x^3 + x^2 + x - 2) = 3$ $\lg x \cdot \lg 100x = 1,25$ $\lg(x+3) - \frac{1}{2} \lg(x-6) = 1$
110. $\log_{12}(12 + (1 - \log_3 x)^2) = 4$
111. $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$ $\log_3 x^2 + \log_9 \frac{1}{\sqrt{x}} = 7$ $\lg^4 x = \lg x^4$ $\frac{\lg(x+1)}{\lg \sqrt{x-1}} = -2$
112. $\log_{x+2}(x^2 - 10x + 25) = 2 \log_{x+2}(5-x)$ $\lg(x+6) - \frac{1}{2} \lg(2x-3) = 2 - \lg 5$
113. $\log_2(4^x - 2^{x+1} + 24) - x = 3$ $x^{\lg x} = 100x$ $4^x + 10^x = 25^x$
114. $4 \log_9 x + \log_x 3 = 3$ $x(1 - \lg 5) = \lg(2^x + x - 1)$ $x + \log_2(9 - 2^x) = 3$
115. Oldjuk meg ezt a nagyon szép egyenletet: $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6$
116. $\lg \sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \lg(2x+15) = 1$
117. $2 \log_x 25 - 3 \log_{25} x = 1$ $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$
118. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ $\log_3 x - 6 \log_x 3 = 5$

Exponenciális és logaritmikus egyenletrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

$$119. \quad \left. \begin{array}{l} 4^x - 2 \cdot 3^y = 14 \\ 4^{x+1} + 3^y = 65 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 5^{x+1} - 2^y = 17 \\ 5^x + 3 \cdot 2^{y-1} = 17 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2^{x+1} + 3 \cdot 7^{y-1} = 11 \\ 2^{x-1} - 2 \cdot 7^y = -12 \end{array} \right\}$$

$$120. \quad \left. \begin{array}{l} (4^x)^{\frac{1}{y}} = 32 \cdot (8^y)^{\frac{1}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3 \cdot (3^{2-2y})^{\frac{1}{y}} \end{array} \right\}$$

$$121. \quad \left. \begin{array}{l} \lg x + \lg y = 1 + 2 \lg 3 \\ \lg(x - y) = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2 \lg x + 3 \lg y = 3 \\ 3 \lg x - 2 \lg y = 11 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \lg x - \lg y = 2 - 2 \lg 5 \\ \log_2(1 + \lg(x + y)) = 1 \end{array} \right\}$$

$$123. \quad \left. \begin{array}{l} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3^y \cdot 9^x = 81 \\ 2 \lg(x + y) - \lg x = 2 \lg 3 \end{array} \right\}$$

Logaritmikus függvények

$$124. \quad \text{Ábrázoljuk a következő függvényeket: } f(x) = \log_2 x \quad g(x) = \log_3 x \quad h(x) = \lg x \\ i(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad j(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad k(x) = \log_{0,1} x$$

$$125. \quad \text{Ábrázoljuk a következő függvényeket:} \\ f(x) = \log_2 x + 3 \quad g(x) = \lg(x - 4) \quad h(x) = 3 \lg x \quad i(x) = 2 \log_2 x - 4$$

Exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségek

126. Oldjuk meg az egyenlőtlenségeket:

$$\log_3(4x - 1) \leq 1 \quad \log_{\frac{1}{2}}\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0 \quad \log_5(6 - 4x) < 2$$

$$127. \quad 3^x \geq 81 \quad 2^x \leq 8 \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{9} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1$$

$$128. \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \frac{1}{27} \quad 3^{1-x} \geq 81 \quad 5^{2x-1} < 25 \quad 1 < 2^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$129. \quad 3^{-x^2+5x-8} < \frac{1}{9} \quad 1 < (x+3)^{x^2-5x+6} \quad 8 < 2^{x^2-8x+18}$$

$$130. \quad \lg(3x+1) > \lg(5x-2) \quad 1 < \log_3(x^2 - 3x + 5) \\ \log_5 x < 1 \quad \log_2 x > 8 \quad \log_3 x < \frac{1}{3} \quad \log_{0,5} x > 4$$

$$131. 5^x - 5^{3-x} \leq 20$$

$$132. \log_{0,7} x < 0,7 \quad \log_{0,3} x \geq 1 \quad \log_{0,5}(x+5) < -1$$

$$133. \log_x(5-2x) < 1 \quad \log_x(2x^2-4x+7) > \log_x(x^2-5x+6)$$

$$134. 2^x \geq 4 \quad 3^x \leq \frac{1}{9} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 16$$

$$135. 2^{2x+1} < 2^x \quad 4^x \leq 16 \quad 9^x < 3 \quad 0,1 < 10^x \quad 0,2^x \geq 5$$

$$136. 10^x > 0,1 \quad 0,2^x \geq 5 \quad 0,3^x < 0,3 \quad \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2 \quad \frac{1}{8^{x+1}} < 16 \quad x^{2x^2} < x^{5x-2}$$

$$137. \log_2 4 < \log_2(x+3) \quad \log_{\frac{1}{3}} 5x \leq \log_{\frac{1}{3}} 25 \quad 0 < \log_4(2x-4) \quad \log_4(2x-4) < 0$$

$$138. \lg(3x+1) > \lg(5x-2) \quad \log_5 x < 1 \quad \log_2 x > 8 \quad \log_3 x < \frac{1}{3} \quad \log_{0,5} x > 4$$

Hol a hiba a következtetésekben? (b egy tetszőleges szám)

139.

$$3 > 2$$

$$3 \cdot \lg \frac{1}{2} > 2 \cdot \lg \frac{1}{2}$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\lg \frac{1}{8} > \lg \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$$

$$1 > 2$$

140.

$$3^{b+1} = 3^b \cdot 3$$

$$3^{b+1} > 3$$

$$\frac{1}{3^{b+1}} < \frac{1}{3^b}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{b+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^b$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{b+1} < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^b$$

$$b+1 < b$$

$$1 < 0$$

141. Oldjuk meg a következő

egyenlőtlenségeket:

$$3^{x-5} \leq 27 \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4} > 0,2$$

$$8^{3x-1} < \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$$

142. Oldjuk meg a következő

egyenlőtlenséget az 1-től különböző pozitív valós számok halmazán:

$$x^{x^2-10x+16} \leq 1$$

Szöveges feladatok

143. Melyik az a pozitív egész szám, amelynek az 50-edik hatványa éppen 69 jegyből áll?

144. Mutassuk meg, hogy három 2-essel és műveleti jelekkel bármelyik szám felírható!

145. A radioaktív izotópok folyamatosan bomlanak. A bomlási folyamatot az idő függvényében ez az exponenciális függvény írja le: $N(t) = N_0 e^{-kt}$, ahol N_0 a folyamat kezdetén meglevő bomlásra képes izotópok száma, t az eltelt idő (órákban mérve), N a t idő elteltével megmaradt bomlásra képes atomok száma, k pedig a kérdésesanyagra jellemző bomlási állandó. A bárium egy izotópjának bomlási állandója $k = 0,04$. Számítsuk ki, hogy 2000 g mennyiséget véve ebből az izotópból mennyi marad belőle 4 nap múlva?

146. Fejtsük meg a keresztrejtvényt:

Vízszintes

1. Az $\log_n x = n$ egyenlet megoldása (n egynél nagyobb egész szám)
2. $(\log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8)^2$
3. Ötszáznál kisebb négyzetszám

	1	
2		
3		

Függőleges

1. Az első és az utolsó számjegye megegyezik
2. Prímszám

147. A brazíliai őserdő a fakivágásokat és az új ültetéseket egybevetve – az ottani természetvédők szerint – évente 1,28%-kal csökken. Ha ez a tendencia nem változik, akkor hány év múlva tűnik el ennek az őserdőnek a fele?

148. András betett a bankba 1 millió Ft-ot. Ez évenként kamatozik 8,5%-ot. Testvére Béla egy másik bankba tette 1,3 millió Ft-ját, ahol évente 6%-ot kamatozik. Hány év múlva lesz Andrásnak ugyanannyi pénze mint Bélának?

149. Magyarország lakossága 2007-ben kb. 10 045 000 fő volt, ami kb. 0,2%-os csökkenést jelentett az előző évhez képest. Ugyanebben az évben Finnország lakossága kb. 5 282 000 fő, ami 0,2%-os emelkedés az előző évhez képest. Ha mindkét országban ez a tendencia folytatódna, akkor kb. hány év múlva érné el Finnország lakosságának létszáma Magyarország lakosságának létszámát?

150. 1990-ben a Föld lakossága 6 milliárd fő volt. A népességkutatók szerint ez a szám évente 1,8%-kal növekszik. Mikor lesz a Föld lakóinak a száma 10 milliárd?

151. Egy lengyelországi erdőszetben 786 muflont tartanak, melyek éves szaporulata 1,2%. Egy szerződés szerint hat és fél év múlva az akkori állomány harmadát elszállítják egy másik telepre. Hány muflon marad ekkor ebben a gazdaságban?

152. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív x értéket, amelyre a) $\lg x$ és $\lg 2x$ egy derékszögű háromszög befogói, $\lg 3x$ pedig az átfogója.

153. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{(17 - 12\sqrt{2})^x} + \sqrt{(17 + 12\sqrt{2})^x} = \frac{10}{3}$$

154. Oldjuk meg ezt a bonyolultnak látszó egyenletet: $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{\frac{12-2\lg x}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = \frac{1024}{100}$

155. Oldjuk meg a következő egyenletrendszer az egész számpárok halmazán:

$$\begin{cases} 3^{3x-1} = 2y^3 - 11y - 693 \\ x = \log_3(y + 1) \end{cases}$$

Vegyes feladatok

156. Melyik nagyobb? $A = 81^{\lg_3 4} \cdot (\lg 7,29 - \lg 0,0729)$ $B = 8 \cdot tg^3 \left(\frac{2025\pi}{4} \right)$

157. Oldjuk meg a paraméteres egyenletet (a egytől különböző pozitív valós szám).

$$6\log_x a + 3\log_{a^2 x} a + \frac{\log_{ax} x}{\log_a x} = 0$$

158. $\frac{32^x + 108^x + 72^x + 243^x}{162^x + 48^x} = \frac{13}{6}$

159. $x + \log_{21}(3^x + 1) = x \log_{21} 7 + \log_{21} 756$

160. Ábrázoljuk a koordináta-rendszerben a sík azon pontjait, amelyek kielégítik ezt az egyenlőtlenséget. $\log_{\sin x}(|y - 1| - 2) > 0$

161. Oldjuk meg a valós számok halmazán: $1 - 6y - y^2 = 5^{-x} + 5^{x+2}$

162. $4^{\frac{2x-1}{3x+2}} \geq \frac{1}{8}$ $3^{\frac{2x+3}{4x-1}} < \sqrt{3}$ $2^{x^2-2x} > 256$

163. $\left. \begin{array}{l} 64^x + 64^y = 12 \\ 2^{x+y} = \sqrt[6]{32} \end{array} \right\}$

164. $\lg(2x^2 + x - 1) > \lg(3x - 1)$ $\log_5(4x - 7) - \log_5(3x - 1) \leq 2$
 $\lg(4x - 4 + \lg(x - 3)) \geq 2$

165. Mely a és b számokra teljesül, hogy az $f(x) = \lg(x - a) + b$ függvény grafikonjára illeszkednek az $(5, -2)$ és a $(95, -1)$ pontok?

166. Mely x esetén lesz ezen kifejezés értéke a legkisebb és mennyi ez a legkisebb érték?

$$\log_7^2(2x - 1) + \frac{16}{\log_7^2(2x - 1)}$$

III. Trigonometria

Emlékeztető: vektorok

1. A sík egy O pontjából az AB szakasz végpontjaiba mutató vektorok $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Írjuk fel ezek segítségével az AB szakasz azon P pontjába mutató vektort, amely AB-t 1:2 arányban osztja!
2. Legyen $\mathbf{a}(3, 5)$ $\mathbf{b}(-4, 2)$ $\mathbf{c}(-2, -5)$. Számítsuk ki a következő vektorok koordinátáit:
 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$ $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$
3. Az $\mathbf{a}(2, 4)$ $\mathbf{b}(-3, 8)$ vektorokat forgassuk el 90 fokkal. Határozzuk meg az így keletkezett vektorok koordinátáit!
4. Egy háromszög csúcsai $A(8, 2)$, $B(6, 9)$, $C(4, -3)$. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ koordinátáit!
5. Számítsuk ki a szakaszok felezőpontjainak koordinátáit:
 $A(6, 6)$ $B(2, 2)$ $C(4, 10)$ $D(12, 3)$ $E(-2, -6)$ $F(-3, -4)$
6. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai $A(-2, 1)$ $B(4, -3)$ $C(2, 3)$. Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit!
7. Határozzuk meg az $A(1, 2)$ $B(2, 6)$ $C(6, 4)$ csúcsokkal megadott háromszög súlyvonalainak a hosszát!
8. Az $A(1, 3)$, $B(5, -2)$ pontokat összekötő szakaszt harmadoljuk. Számítsuk ki az A-hoz közelebb levő harmadolópont koordinátáit!
9. Egy rombusz hosszabb átlója kétszerese a rövidebbnek. A rövidebb átló végpontjainak koordinátái $(-3, 7)$ és $(5, 11)$. Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit.
10. Egy téglalap hosszabb oldala háromszorosa a rövidebb oldalának. Az egyik hosszabbik oldal végpontjainak koordinátái $(-2, 4)$ és $(7, 16)$. Számítsuk ki a téglalap csúcsainak koordinátáit.
11. Az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontja $(2, -3)$, az A-hoz legközelebbi hatodoló pontja $(-1, -4)$. Számítsuk ki az A és B pontok koordinátáit.
12. Mekkora az ABC háromszög oldalai? $A(3, 4)$ $B(-7, -6)$ $C(5, -1)$

Emlékeztető: sinus, cosinus, tangens, cotangens

13. Egy hegyre az északi és a déli oldaláról két ösvény vezet fel, amelyek azonos szintről, egymástól légvonalban 8 km távolságban indulnak. Milyen magas a hegy, ha a két ösvény emelkedési szöge $18^\circ 24'$, illetve $22^\circ 43'$?

14. Egy domb tetején 20 m magas kilátótorony van. Egy völgy egy pontjából a kilátótorony alja $47,5^\circ$, a teteje $50,2^\circ$ emelkedési szögben látszik. Mekkora utat tesz meg az a varjú, amelyik a völgy ezen pontjából a kilátótorony tetejére egy egyenes mentén repül?

15. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét számológép nélkül:

$$3\sin 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\frac{\cos 30^\circ - \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 45^\circ}$$

$$\sin^2 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \cos^2 60^\circ$$

$$\sin^2 30^\circ - 2\cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
ctg		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

16. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőségek azonosságok:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

17. Az egyik szögfüggvény ismeretében számítsuk ki a hiányzó hármat! $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ $\cos \alpha = \frac{3}{4}$

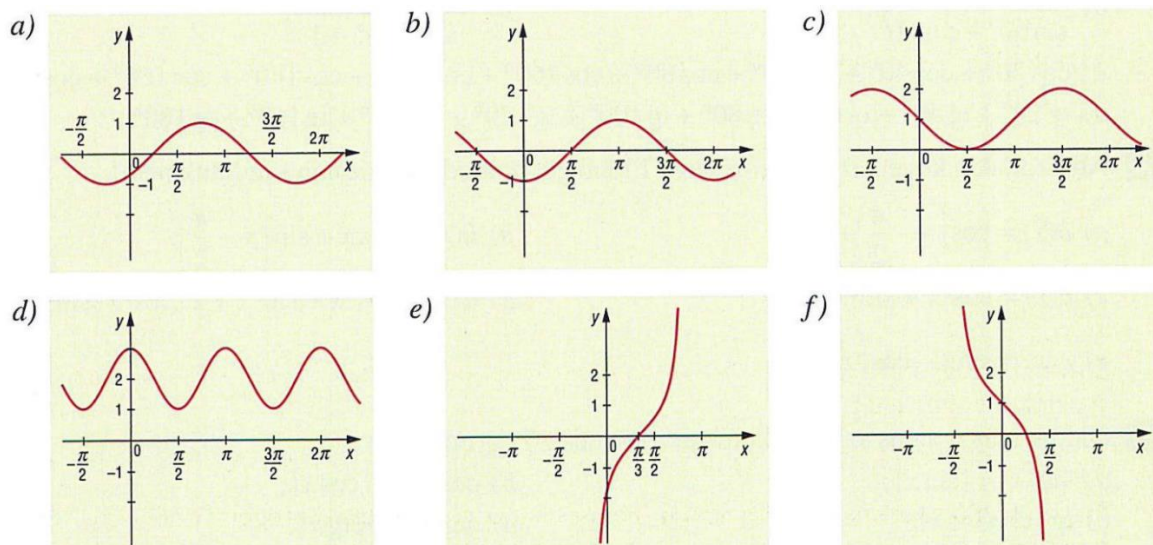
18. Hozzuk a legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha \qquad \frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \qquad \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

19. A definíció alapján, számológép nélkül számítsuk ki!

$$\cos \frac{5\pi}{3} \qquad \sin \frac{5\pi}{4} \qquad \sin \frac{5\pi}{6} \qquad \cos \frac{7\pi}{2} \qquad \sin \frac{7\pi}{6}$$

20. Írjuk fel a trigonometrikus függvények hozzárendelési szabályát!



21. Ábrázoljuk és jellemezzük a függvényt! $f(x) = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

22. Ábrázoljuk a függvényeket! $f(x) = -\cos x$ $f(x) = -\cos x + 2$ $f(x) = -3\cos x$

23. Ábrázoljuk a függvényeket! $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $f(x) = \sin(x + 45^\circ)$

24. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos(x - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 1 = 0 \quad 7 \sin x = 3$$

$$2 \cos x = \sqrt{3} \quad 4 \cos^2 x = \sin^2 x \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \quad \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

25. Oldjuk meg grafikusán! $\sin x = \cos x$

26. Oldjuk meg az egyenleteket grafikusán vagy algebrailag!

$$2 \sin x = \operatorname{tg} x \quad 3 \sin x = 2 \operatorname{tg} x \quad \sin x = 2 \cos x$$

27. Oldjuk meg grafikusán az egyenleteket! $\sin x = \frac{1}{2}$ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin x = \cos x$

Vektorok skaláris szorzata

28. Az ABC egyenlő szárú, derékszögű háromszögben (a derékszög C-nél van) a befogók hossza 1, az oldalvektorok $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BA} = \mathbf{c}$. Számítsuk ki a következő szorzatokat!

$$\mathbf{ab}, \quad \mathbf{ac}, \quad \mathbf{bc}, \quad (\mathbf{a-b})\mathbf{c}, \quad (\mathbf{a+b})(\mathbf{a-b}), \quad (\mathbf{a+b})\mathbf{c}$$

29. Az ABC egységoldalú szabályos háromszögben az oldalvektorok $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$. Számítsuk ki a következő szorzatokat! $\mathbf{ab}, \mathbf{ac}, \mathbf{bc}, (\mathbf{b-c})\mathbf{a}, (\mathbf{b+c})\mathbf{a}, (\mathbf{b+c})(\mathbf{b-c})$

30. Mekkora szöget zárnak be az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok, ha tudjuk, hogy az $5\mathbf{a}-4\mathbf{b}$ és az $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek?

31. Mekkora a háromszög szögei, ha a csúcsok koordinátái (2, 1), (4, -3), (5, 0)?

32. Számítsuk ki a következő vektorok skaláris szorzatát! Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szöget γ jelöli.

$$\begin{array}{ll} |\mathbf{a}| = 4, & |\mathbf{b}| = 3, \quad \gamma = 60^\circ & |\mathbf{a}| = \sqrt{2}, & |\mathbf{b}| = 5, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4} \\ |\mathbf{a}| = 10, & |\mathbf{b}| = 2, \quad \gamma = 180^\circ & |\mathbf{a}| = 5, & |\mathbf{b}| = 10, \quad \gamma = 0^\circ \end{array}$$

33. Létezik-e három olyan vektor, amelyekre igaz, hogy $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

34. Számítsuk ki a két vektor hajlásszögét! $|\mathbf{a}| = 8, \quad |\mathbf{b}| = 20, \quad \mathbf{ab} = 12$

$$|\mathbf{a}| = 12, \quad |\mathbf{b}| = 10, \quad \mathbf{ab} = -20 \qquad |\mathbf{a}| = 5, \quad |\mathbf{b}| = 3, \quad \mathbf{ab} = 15$$

$$|\mathbf{a}| = 2, \quad |\mathbf{b}| = 0,5, \quad \mathbf{ab} = -1 \qquad |\mathbf{a}| = 2, \quad |\mathbf{b}| = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{ab} = \sqrt{3}$$

35. Legyen $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Számítsuk ki a két vektor skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét!

36. Legyen $\mathbf{a}(3, 2)$ $\mathbf{b}(-1, 4)$. Számítsuk ki a következő szorzatokat!

$$\mathbf{ab}, \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b}), \quad \left(\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}\right)(\mathbf{a} + 3\mathbf{b}), \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2, \quad (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$$

37. Milyen hosszú a két vektor, mennyi a skaláris szorzatuk és mekkora szöget zárnak be?

$$\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

38. A következő két vektor merőleges egymásra. Mennyi az y értéke? $\mathbf{a}(-2, 4)$ $\mathbf{b}(6, y)$

39. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű! $A(7, 4)$ $B(0, -5)$ $C(-2, 1)$

40. Mekkora a háromszög szögei? $A(-1, -2)$ $B(2, 3)$ $C(4, -1)$, $A(4, 2)$ $B(1, 4)$ $C(2, -3)$

41. Mekkora szöget zárnak be egymással az (1, 8) és a (6, 2) pontokból az origóba húzott szakaszok?

42. Mekkora szöget zárhat be az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor, ha a skaláris szorzatuk

a) pozitív, b) negatív, c) nulla?

47. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.

48. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszegének négyszerese egyenlő az oldalak négyzetösszegének háromszorosával.

49. Mekkora a háromszög szögei, ha a csúcsok koordinátái $A(3, -1)$ $B(2, 4)$ $C(-1, 5)$?

50. Számítsuk ki a két vektor skaláris szorzatát és az általuk bezárt szöget!

$$\mathbf{a}(4, 3) \quad \mathbf{b}(6, 8) \qquad \mathbf{a}(4, -3) \quad \mathbf{b}(2, 5) \qquad \mathbf{a}(-2, 8) \quad \mathbf{b}(12, 9)$$

51. Két vektor közül az egyik kétszer olyan hosszú, mint a másik. Az általuk bezárt szög 60° , a skaláris szorzatuk 4. Milyen hosszú a két vektor?

52. Adott két vektor abszolútértéke és hajlásszöge. Számítsuk ki a skaláris szorzatukat!

$$|\mathbf{a}| = 9, \quad |\mathbf{b}| = 10, \quad \gamma = 73^\circ \quad |\mathbf{a}| = 4, \quad |\mathbf{b}| = 13, \quad \gamma = 103^\circ \quad |\mathbf{a}| = 18, \quad |\mathbf{b}| = 0,6, \quad \gamma = 117^\circ 45'$$

53. Számítsuk ki annak a paralelogrammának a szögeit, amelynek oldalhosszai 10, illetve 20, az egyik csúcsából induló két oldalvektor skaláris szorzata pedig 184,1.

54. Számítsuk ki annak a rombusznak az oldalhosszát, amelynek egyik szöge 70° , és az ebből a csúcsból induló két oldalvektor skaláris szorzata 30,22.

55. Igazoljuk, hogy ha $4\mathbf{b} - \mathbf{a}$ és $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ merőleges egymásra, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ (egyik sem nullvektor) hegyesszöget zár be egymással.

56. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ merőleges egymásra, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ (egyik sem nullvektor) tompaszöget zár be egymással.

57. Az adott $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok egyike sem nullvektor. Igazoljuk, hogy van olyan k valós szám, amelyre $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} - k\mathbf{b}$ merőleges egymásra.

A sinustétel és a cosinustétel

58. Egy háromszög két oldala 5 és 7, a hosszabb oldallal szemközti szög 50° . Mekkora a rövidebb oldallal szemközti szög?

59. Egy háromszög két oldala 2 és 8, a hosszabb oldallal szemközti szög 45° . Mekkora a rövidebb oldallal szemközti szög és a háromszög harmadik oldala?

60. Egy háromszög két oldala 11 és 12, a rövidebb oldallal szemközti szög 45° . Mekkora a hosszabb oldallal szemközti szög és a háromszög harmadik oldala?

61. Léteznek-e olyan háromszögek, amelynek oldalai és egyik szöge

$$a = 8 \text{ cm}, \quad \alpha = 45^\circ \quad b = 2 \text{ cm}$$

$$a = 11 \text{ cm}, \quad \alpha = 45^\circ \quad b = 12 \text{ cm}$$

62. Egy háromszög kerülete 15 cm, szögeinek arány 3:4:5. Határozzuk meg a háromszög oldalait és szögeit.

63. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit, ha $a = 30 \text{ cm}, \quad \alpha = 42^\circ \quad \beta = 72^\circ$

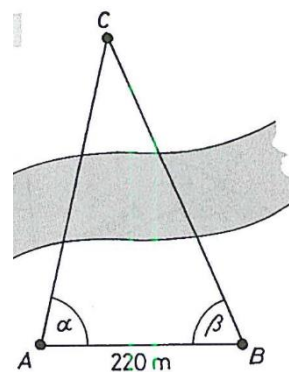
$$a = 24 \text{ cm}, \quad \alpha = 120^\circ \quad \gamma = 20^\circ$$

$$b = 40 \text{ cm}, \quad c = 28 \text{ cm} \quad \beta = 70^\circ$$

$$a = 2,5 \text{ dm}, \quad b = 1,8 \text{ dm} \quad \beta = 46,3^\circ$$

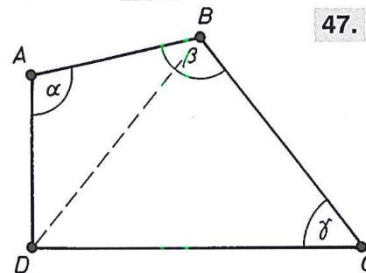
$$c = 4,25 \text{ cm}, \quad b = 3,42 \text{ cm} \quad \beta = 39,52^\circ$$

64. Egy folyó egyik partján kijelölt A pontnak a másik parton fekvő C ponttól való távolságát akarjuk meghatározni. Az AC távolság azonban közvetlenül nem mérhető. Ezért lemérjük az ábrán látható AB távolságot és teodolittal lemérjük az α és a β szögeket. Két értékes jeggyel $AB = 220$ m, $\alpha = 62^\circ$, $\beta = 71^\circ$. Számítsuk ki az A és a C pontok távolságát!



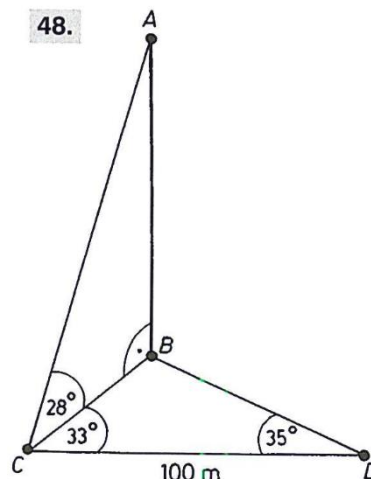
47.

65. A 47. ábrán látható négyszögben $AB = 32$ m, $\alpha = 96^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 54^\circ$. Az ABD szög és a DBC szög aránya 2:3. Számítsuk ki a négyszög oldalait!



66. A 48. ábra szerint egy sík terepre felállított torony AB magasságát akarjuk megmérni. Ehhez felvettük a síkban fekvő BCD háromszöget úgy, hogy $CD = 100$ m, $\angle BCD = 33^\circ$, $\angle CDB = 35^\circ$. A C pontból az AB 28° emelkedési szögben látszik. Számítsuk ki a torony magasságát!

48.



67. Egy háromszögben ismerjük két oldal összegét: 20 cm, és az ezekkel az oldalakkal szemben fekvő 42° -os és 86° -os szögeket. Mekkora a háromszög oldalai?

68. Egy háromszög két oldala 5 cm és 6 cm, a kisebbik oldallal szemközti szög 35° . Mekkora a háromszög ismeretlen szögei? Több megoldás is lehet.

69. Egy szabályos háromszög oldalai 30 cm hosszúak. Osszuk az egyik szöget két egyenessel három egyenlő részre. Mekkora részekre osztják az egyenesek a szöggel szemközti oldalt?

70. Egy háromszög egyik szöge $64,6^\circ$, ennek a szögnek a szögfelezője 18,54 cm, és a szög csúcsából kiinduló magasság 17,82 cm. Mekkora a háromszög oldalai és ismeretlen szögei?

71. Egy általános trapézról ismerjük a hosszabbik párhuzamos oldalt, 48 cm, a két szárát (24 és 36 cm), az alap és a 24 cm-es oldal által bezárt szöget, $63,8^\circ$. Mekkora a trapéz negyedik oldala és mekkora az ismeretlen szögei?

72. Az A és B megközelíthetetlen helyek távolságát kell meghatározni. Az AB szakaszon fekvő C pontból kiinduló 500 m CD alaptávolságot vesszük fel, lemérjük C-nél és D-nél a következő szögeket: $\angle ACD = 76^\circ 30'$, $\angle ADC = 74^\circ 42'$, $\angle CDB = 35^\circ 30'$. Mekkora az AB távolság?

73. Két egyenes vasúti pálya egymást $37^\circ 15'$ szög alatt metszi. A keresztezéstől a legközelebbi őrházig a távolság az egyik pályán 135 m, a másikon 243 m. Mennyire van egymástól a két őrház?

74. Mekkora szög alatt látjuk két magányos fa távolságát olyan pontból, amely az egyik fától 250 méterre, a másiktól 220 méterre van, ha a két fa távolsága egymástól 150 méter?
75. Egy paralelogramma szomszédos oldalai 24 dm és 16 dm hosszúak, az általuk bezárt szög $48^{\circ}26'$. Milyen hosszú a két átló?
76. Egy háromszög két oldala 9 cm és 15 cm hosszú. A nagyobbik oldalt felező súlyvonal 12 cm. Mekkora a háromszög harmadik oldala?
77. Egy háromszög két oldala 82 cm és 56 cm hosszú, az általuk bezárt szög $98^{\circ}26'$. Mekkora a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal?
78. Egy konvex általános négyszög oldalai sorban 7 cm, 3 cm, 5 cm és 6 cm hosszúak. A 6 és 7 cm-es oldalak által bezárt szög $41^{\circ}54'$. Számítsuk ki a négyszög ismeretlen szögeit!
79. Egy konvex általános négyszög két szomszédos oldala 4 cm és 5 cm hosszú, az általuk bezárt szög 140° . A 4 cm-es oldalon fekvő másik szög 100° , az 5 cm-es oldalon fekvő másik szög 80° . Mekkora a négyszög ismeretlen oldalai?
80. Egy háromszög egyik oldala 5 cm, a másik két oldal összege 8 cm és az 5 cm-es oldallal szemben fekvő szög 60° . Mekkora a másik két szög, és mekkorák az ismeretlen oldalak?
81. Egy háromszög egyik oldala 6 cm, a másik két oldal különbsége 4 cm, és a 6-cm-es oldallal szemközti szög 75° . Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
82. Egy általános háromszögben az egyik oldala 34 cm, a hozzá tartozó súlyvonal 18,2 cm, a 34 cm-es oldalon fekvő egyik szög $32^{\circ}25'$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?
83. Számítsuk ki a háromszög ismeretlen oldalait és szögeit, ha $a = 12 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$ $\gamma = 40^{\circ}$
 $b = 13,4 \text{ cm}$, $c = 18,5 \text{ cm}$ $\alpha = 110^{\circ}$ $a = 24 \text{ cm}$, $b = 25 \text{ cm}$ $c = 30 \text{ cm}$
 $a = 19 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$ $c = 9 \text{ cm}$ $b = 20 \text{ cm}$, $c = 25 \text{ cm}$ $\alpha = 60^{\circ}$
84. Egy húrnégyszög három egymás mellett fekvő oldala $a = 18 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$ $c = 7 \text{ cm}$, az a és b oldalak által bezárt szög 60° . Számítsuk ki a negyedik oldalt!
85. Egy konvex négyszög három egymás utáni oldala 15 cm, 13 cm és 8 cm. Az első két oldal közötti szög $85,75^{\circ}$, a második és a harmadik oldal közötti szög $74,33^{\circ}$. Mekkora a négyszög ismeretlen szögei és oldalai?
86. Egy háromszögben az egyik oldal hossza 18 cm, a hozzá tartozó súlyvonal hossza 10 cm, az oldalon levő egyik szög $36,28^{\circ}$. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?
87. Az óra kis- és nagymutatójának végpontja kettő órakor 13 cm, kilenc órakor 17 távolságban vannak. Milyen hosszúak a mutatók?
88. Legyen egy háromszög egyik szöge $118^{\circ}24'$. A szög csúcsából induló 5 és 7 cm hosszú és a szemközti oldalon végződő szakaszok az adott szöget három egyenlő részre osztják. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?

89. Egy háromszögben $a + b = 122$ cm, $b = 76$ cm, $\gamma = 138^\circ 52'$. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei? (c-vel szemben γ szög van)

90. Egy háromszögben két oldal összege $a+b=20$ cm, a velük szemközti szögek $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 84^\circ$. Mekkora a háromszög oldalai?

91. Egy trapéz két párhuzamos oldala 48,36 cm és 13,41 cm, az egyik szár 57,82 cm hosszú. Ennek a nagyobb alappal bezárt szöge $68^\circ 18'$. Mekkora a trapéz ismeretlen szögei és a negyedik oldal?

92. Egy háromszögben az egyik szög $\alpha = 12^\circ 24'$, egy másik szöggel szemközti oldalhoz (b) tartozó súlyvonal $s_b = 81,25$ cm, a b oldalnak a c oldalra vett merőleges vetülete 136 cm. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?

Addíciós összefüggések

93. Az addíciós összefüggések alapján hozzuk egyszerűbb alakra.

$$\sin(90^\circ + \alpha) \quad \cos(90^\circ + \alpha) \quad \sin(90^\circ - \alpha) \quad \cos(90^\circ - \alpha) \quad \sin(180^\circ + \alpha) \quad \sin(180^\circ - \alpha)$$

94. Az addíciós összefüggések alapján hozzuk egyszerűbb alakra!

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \quad \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) \quad \sin(\alpha + 60^\circ) + \sin(\alpha - 60^\circ) \quad \cos(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha) \\ & \sin \alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha + 240^\circ) \end{aligned}$$

95. Az addíciós összefüggések felhasználásával oldjuk meg az egyenleteket!

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

96. Alakítsuk át a következő kifejezéseket úgy, hogy a $2x$ -re vonatkozó addíciós összefüggéseket alkalmazzuk.

$$\frac{\sin 2x}{2 \sin x} \quad \cos 2x + 2 \sin^2 x \quad (\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x \quad \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \cos x$$

97. Lássuk be, hogy a következő egyenlőségek azonosságok!

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha \quad \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \quad \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \quad \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

$$2 \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \sin 2\alpha \quad 2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sin 2\alpha \quad \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \sin 2\alpha$$

98. Az addíciós összefüggések felhasználásával oldjuk meg az egyenleteket!

$$\begin{aligned} \sin(60^\circ - x) &= 2 \sin x & \cos(30^\circ - x) &= 3 \sin x & \cos 2x &= \sin x & \sin 2x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin 2x - \cos x &= 0 & 3 \sin 2x &= 2 \cos x & \sin 2x &= 2 \sin x & \sin x &= \frac{\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

99. Az addíciós összefüggések felhasználásával oldjuk meg az egyenleteket!

$$12\sin^2 x - 2\cos^2 x = 3\cos 2x \quad 2\sin 2x = \operatorname{tg} x \quad \sin 2x = \operatorname{tg} x$$

100. Milyen messze van a derékszög csúcsától az egység befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az a P belső pontja, amelyből az egyik befogó 90 fokos, a másik befogó 120 fokos szögben látszik?

101. Egy háromszög alapját a hozzá tartozó magasság egy 9 és egy 4 cm-es darabra bontja. A háromszögnek az alap 4 cm-es darabja mellett levő szöge kétszerese a 9 cm-es darabon fekvő szögnek. Mekkora a háromszög szögei, és mekkora az alaphoz tartozó magasság?

$$102. \sin x + \cos x = 1 \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2} \quad \sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \quad \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$$

103. Egy háromszög egyik oldala kétszer akkora, mint a másik. Közülük az egyikkel szemben 15 fokkal nagyobb szög van, mint a másikkal szemben. Mekkora a háromszög szögei?

Trigonometrikus egyenletek

Oldjuk meg az egyenleteket:

$$104. \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0,5 \quad \sin 2x = 1$$

$$105. \sin x \cdot (\sin x - 1) = 0 \quad \cos^2 x - \cos x = 0 \quad \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$106. \sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 0 \quad \sin x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 0 \quad 3\operatorname{ctg} x = 2\cos x$$

$$107. 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0 \quad 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \quad 2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad 4\cos^2 x = \sin^2 x \quad \sin 4x = \sin 3x \quad \cos 2x = \cos x$$

$$108. \cos 2x = \cos x \quad \cos 10x = \cos 2x \quad \cos 5x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$109. 2^{\sin^2 x} = \sin x \quad \lg \sin x - \lg \cos x = \frac{1}{3} \lg 3 \quad \sin^4 x - \cos^4 x = -2\cos x \quad \sin 2x + \cos 2x = -1$$

$$110. 4\sin \pi x = 4x^2 - 4x - 5 \quad \cos x = x^2 + 1 \quad 4\sin \pi x = x^2 - x + 4,5 \quad \sin 8x = \operatorname{tg} 4x$$

$$111. \operatorname{ctg} x + \cos x - \cos x \cdot \operatorname{ctg} x - 1 = 0 \quad 5\sin x \cdot \operatorname{tg} x - \sin x - 5\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$112. \cos 2x = 1 + \sin 3x \quad (3 - \sin 6x)(1 + \sin 2x) = 9$$

$$113. \sin 3x \cdot \sin x = \frac{1}{4} \quad \cos 3x + 2\cos x = 0 \quad (122.) \quad 3\sin^2 x - 4\cos^2 x = \sin x \cos x$$

$$114. \sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \quad \cos 2x = \cos x \quad \cos 10x = \cos 2x$$

$$115. \sin\left(10x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \cos x + \frac{1}{\cos x} = 2,5$$

$$116. \quad \sin x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad (134.) \quad \cos^2 x - 3\sin x \cos x + 2\sin^2 x = 0$$

$$117. \quad \operatorname{tg}^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0 \quad 8\sin^2 x - 7\cos^2 x = 8$$

$$118. \quad \text{Oldjuk meg ezt a gyönyörű egyenletet: } x^{\lg \operatorname{tg} x} + x^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2$$

Vegyes trigonometriai feladatok

$$119. \quad \text{Mi a következő kifejezés értelmezési tartománya? } \lg \sqrt{1 - \cos^2 \pi x}$$

120. Lássuk be, hogy egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha a szögei között fennáll, hogy $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$.

121. Lássuk be, hogy ha egy háromszögben $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}}$, akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

122. Lássuk be, hogy ha egy háromszög szögei között fennáll a $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 2 \cos \alpha$ összefüggés, akkor a háromszög egyenlő szárú.

123. Egy egyenes útból $35^\circ 48'$ szög alatt balra egy mellékút ágazik el, 20 km-re messzebb egy másik mellékút jobbra ágazik el 30° -os szög alatt. Az elsőt 40 km-t, a másodikon 25 km-t haladva egy-egy községbe érünk. Milyen messze van a két község egymástól?

124. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben $\operatorname{tg} \beta \cdot \sin^2 \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \beta$, akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

125. Egy háromszög két oldala 13,2 cm és 28,5 cm. Az általuk bezárt szög $65,2^\circ$. Mekkora a háromszög területe?

126. Egy paralelogramma két oldala 14 cm és 16 cm hosszú. Az általuk bezárt szög 53° . Mekkora a paralelogramma területe?

127. Egy paralelogramma két átlója 32,5 cm és 43,8 cm hosszú. Az általuk bezárt szög 62° . Mekkora a paralelogramma területe?

128. Egy háromszög területe 715 m^2 . Egyik oldala 53,4 m, és az ezen az oldalon fekvő egyik szöge $38,8^\circ$. Mekkora a háromszög ismeretlen oldalai és szögei?

129. Egy általános háromszögben az egyik oldal 34 cm, a hozzá tartozó súlyvonal 18,2 cm, az egyik rajta fekvő szög $32^\circ 25'$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?

130. Adjuk meg a kifejezések értelmezési tartományát!

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \cos x} \quad \operatorname{ctg} \lg x \quad \lg \sqrt{1 - \cos^2 \pi x}$$

131. Egy általános háromszögben $a^2 + b^2 = 6514$, $ab = 3015$, $\gamma = 67^\circ 45'$. Mekkora a háromszög oldalai és szögei?

132. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan x -re, amelyre $\operatorname{ctg} x$ értelmezve van, teljesül, hogy
 $\operatorname{ctg} x - \sin 2x = \operatorname{ctg} x \cdot \cos 2x$

133. Egy háromszögben ismerjük két oldal különbsége 6 cm, és az ezekkel az oldalakkal szemközti szögek $32,6^\circ$ és $75,8^\circ$. Mekkora a háromszög oldalai?

134. Lássuk be, hogy $a + \frac{1}{a} \geq 2$, ha a pozitív szám.

135. Az előző feladat eredményét felhasználva oldjuk meg: $2 \cos \frac{x}{3} = 2^x + 2^{-x}$

136. Határozzuk meg y értékét úgy, hogy $\mathbf{a}(-12,4)$ és $\mathbf{b}(6,y)$ vektorok egymásra merőlegesek legyenek.

137. Bizonyítsuk be, hogy a következő három pont derékszögű háromszöget határoz meg:
 $A(7,4)$, $B(0,-5)$, $C(-2,1)$

138. Egy háromszög területe 84 négyzetcentiméter, két szögének nagysága $67,38^\circ$, illetve $53,13^\circ$. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát.

139. Egy háromszög kerülete 14 cm, két szöge $43,8^\circ$, illetve $64,7^\circ$. Mekkora a háromszög oldalai?

140. Egy trapéz alapjai 120 m, illetve 75 m hosszúak, szárjai 52 m, illetve 86 m hosszúak. Mekkora a trapéz szögei?

141. Egy konvex négyszög három egymás utáni oldala 15 cm, 13 cm és 8 cm. Az első két oldal közötti szög $85^\circ 45'$, a második és a harmadik oldal közötti szög $74^\circ 20'$. Mekkora a négyszög ismeretlen szögei és oldalai?

142. Egy háromszög két oldalának különbsége 3 cm, ezen oldalak által bezárt szög $36,88^\circ$. A háromszög területe 20 cm^2 . Mekkora a háromszög oldalai?

143. Lássuk be, hogy $\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma}$ mindig megadja a háromszög területét.

144. Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet:

$$\frac{\cos^2 x + 4}{\sin^2 x - 4} = \frac{-3 \cos^2 x + 3 \sin x - 4}{\cos^2 x + 3}$$

145. Sík talajon az 5 méter magas, függőlegesen álló oszlop teteje a sík A pontjából $6,5^\circ$ a B pontjából pedig $5,6^\circ$ emelkedési szögben látszik. Az oszlop tetejéről az AB távolság 80° -os látószög alatt látható. a) Írjuk le röviden, hogy hogyan határoznánk meg az ABC háromszög területét (C az oszlop alja), ha az AB hosszát ismernénk. b) Mekkora az AB távolság?

146. Mekkora szöget zárnak be az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egységvektorok, ha tudjuk, hogy az $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és az $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorok merőlegesek?

147. Az **a** és **b** egyenlő hosszúságú vektorok 120 fokos szöget zárnak be. Mekkora szöget zárnak be az **a-2b** és az **5a+4b** vektorok?

148. Az ABC háromszög súlypontja körül szerkesszünk egy r sugarú kört. Bizonyítsuk be, hogy a kör területének bármely P pontjára $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg ugyanakkora.

149. Az ABC háromszög oldalaira kifelé az ACED és a BCFG négyzeteket rajzoltuk. Igazoljuk, hogy ha az AB oldal felezőpontja H, akkor a CH egyenese merőleges EF egyenesére és $EF = 2CH$.

150. Az **a**(4, -3) és **b** vektorok 45 fokos szöget zárnak be. Adjuk meg a **b** vektor első koordinátáját, ha a második koordinátája -7.

151. Írjunk fel egy olyan vektort, amely az **a**(12, 5) és a **b**(4, -3) szögfelezőjének irányába mutat.

153. $\sin 3x = \sin 2x$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} x$

154. $2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{3}$

155. Mely konvex α szögekre van két valós gyöke ennek az egyenletnek?

$$(2\cos\alpha + 1) \cdot x^2 - 4x + 4\cos\alpha - 2 = 0$$

IV. Sorozatok

1. Írjuk fel a sorozatok első négy elemét!

$$\{3n-2\} \quad \left\{\frac{2n-3}{n+1}\right\} \quad \left\{\sin \frac{\pi}{4} n\right\} \quad \{\log_2 n\} \quad \{n^n\} \quad \{\log_2 n\}$$

2. Adjuk meg képlettel azt a sorozatot, amelynek első néhány eleme

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots \quad 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \dots \quad 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots \quad 0, 2, 6, 12, 20, \dots$$

3. Hányadik eleme a sorozatnak a 16?

$$\{n^2\} \quad \{(-2)^{n-1}\} \quad \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right\} \quad \{n^2 - 17n + 16\} \quad \{\log_2(n+1)\}$$

4. A 2, 5, 8, 11, 24, 17, ... végtelen sorozatban mely számok szerepelnek a következők közül?
634, 1205, 576 309, 46 028.

Amelyik szám előfordul a sorozatban, az hányadik tagként szerepel benne?

5. Melyik az ezredik páratlan szám?

6. Az 5, 9, 13, 17, ... sorozatnak mi a 6000-edik tagja?

7. Melyik az n -edik páratlan szám?

8. Melyik a $(3n+5)$ -dik páratlan szám?

9. Írd fel a sorozatok első öt tagját! $a_n = 3n + 4$

$$c_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

10. Mi a sorozat hetedik tagja? $b_n = \frac{n}{n+1}$.

11. Szerepel-e az $a_n = n^2 + 2n$ sorozatban a 940?

12. Adjuk meg a sorozat első öt tagját és fejezzük ki a_n -et n -nel: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n$

13. Adjuk meg a sorozat ötödik tagját és fejezzük ki a_n -et n -nel: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = n \cdot a_n$

14. Adjuk meg a sorozat nyolcadik tagját: $a_1 = 7$, $a_{n+1} = a_n + n$

15. Adjuk meg a sorozat századik tagját: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2$

16. Adjuk meg a sorozat háromszázharmincharmadik tagját: $a_1 = 9$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$

17. Egy gyár évi termelése egy-egy év alatt 20%-kal csökken, 10%-kal nő, továbbá 30%-kal nő, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. Milyen sorrendben következzenek ezek be, hogy a negyedik évre a lehető legnagyobb termelés jöjjön ki?

18. Egy téglalap egyik oldalát 20%-kal csökkentjük. Mennyivel növeljük meg a másik oldalt, ha azt akarjuk, hogy a területe változatlan maradjon?

19. Egy gép árát először 70%-kal felemelték, majd a felemelt árat 40 %-kal csökkentették. Az így kapott ár hány százalékkal több az eredetinel?

20. Egy óra árát 20%-kal felemelték, majd a felemelt árat 20%-kal csökkentették. Az így kapott ár hány százaléka az eredetinek?

21. Egy luxuscikk árát valahány százalékkal megemelték, majd miután így nem volt elég kelendő, a felemelt árat ugyanannyi százalékkal csökkentették. Így végül feleannyiba került, mint eredetileg. Hány százalékos volt a két árváltozás?

22. Egy dúsgazdag fiatalember – kezében a 100 000 dolláros apai örökséggel – elment Monte Carloba szerencsét próbálni. Az első nap még csak 1 dollárt veszített, de attól kezdve minden nap éppen 2 dollárral veszített többet, mint az előző nap. Mennyi idő alatt fogy el a 100 000 dollár?

23. Egy sorozatban $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2n$. Fejezzük ki az n -edik tagot n -nel.

24. Egy sorozatban $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Mennyi a tizedik és az ezredik tag?

25. Tudsz-e mondani olyan szigorúan monoton növény sorozatot, amely korlátos?

26. Adj példát olyan korlátos sorozatra, amelyben sem legnagyobb, sem legkisebb elem nincs.

27. Konstruáljunk egy olyan, pozitív egész számokból álló H halmazt, amelyre igaz, hogy n akkor és csak akkor eleme H -nak, ha $n+3$ nem eleme a halmaznak. (n pozitív egész szám) Hány ilyen halmaz van?

28. Mennyi az első n db kettő-hatvány összege és szorzata?

Számítási sorozatok

29. Határozzuk meg annak a számítási sorozatnak az első tagját, amelynek második és harmadik tagja $a+1, a+3$ $3-2a, 1-2a$ $a-1, 2a-3$

30. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a következő három szám egy számítási sorozat három egymást követő eleme legyen.

$$1, a, 4 \quad a-1, a+1, 2 \quad -2, a+1, 4a \quad 1, -a, a^2$$

31. Határozzuk meg a számítási sorozat első hat elemét, ha a második és hetedik eleme

$$2, 7 \quad 1, 6 \quad 2, -3 \quad -2x^2, 3x^2$$

32. Határozzuk meg a számítási sorozatok keresett elemét!

$$a_1 = 3 \quad a_5 = 11 \quad a_7 = ? \quad a_2 = -1 \quad a_{10} = 7 \quad a_6 = ? \quad a_7 = 2 \quad a_{10} = -1 \quad a_3 = ?$$

33. Határozzuk meg a számítási sorozatok első elemét és differenciáját!

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a_7 = 16 \\ a_3 + a_9 = 24 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a_2 - a_5 = 3 \\ a_3 + a_4 = 11 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a_7 - a_2 = 1 \\ a_{20} = 2a_{10} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = a_5 \\ a_2^2 = a_{14} \end{array} \right\}$$

34. Egy számítási sorozat első két tagjának összege 7, harmadik és negyedik tagjának összege 19. Határozzuk meg a sorozat első négy tagját.

35. Egy öttagú számítási sorozat tagjainak összege 180, a negyedik és ötödik tag összege 81, Határozd meg a sorozat tagjait!

36. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = 7n-1$ sorozat számítási sorozat!

37. Határozd meg az első n db páratlan természetes szám összegét!

38. Határozd meg az első a) 20 darab, b) 30 darab 3-mal osztva 2 maradékot adó pozitív egész szám összegét!

39. a) Egy 20 tagú számítási sorozat első tagja 7, az utolsó tag 77. Mennyi a tagok összege?

b) Egy számítási sorozat 32. tagja 150, 34. tagja pedig 156. Mennyi a 35. tag? Hányadik tagként szerepel a 180?

c) Egy számítási sorozat első 5 tagjának összege 60. Mennyi a sorozat harmadik tagja?

d) Egy számítási sorozat első 11 tagjának összege 1. Megállapítható-e ebből a sorozat valamelyik tagjának az értéke?

e) Egy számítási sorozat harmadik tagja 4, századik tagja 6. Mennyi az ötödik tag?

f) Egy háromszög szögei számítási sorozatot alkotnak. Lehet-e ebből következtetni a háromszög valamelyik szögének nagyságára?

g) Egy számítási sorozat hetedik és negyedik tagjának különbsége 15. Mennyi a 102-edik és a 97-edik tag különbsége?

40. Számítsuk ki a számítási sorozat első n tagjának összegét, ha

$$a_1 = 10 \quad d = 2 \quad n = 50 \quad a_1 = 2 \quad d = -\frac{4}{9} \quad n = 10 \quad a_5 = 24 \quad a_6 = 27 \quad n = 15$$

41. Számítsuk ki a négyjegyű természetes számok összegét.

42. Melyik az a számtani sorozat, amelyben első öt tag összege 60 és ezek szorzata 122 880?
43. Hány elemet kell összeadni a számtani sorozatban, hogy $7 + 19 + 31 + 43 + \dots + a_n = 18\,205$ legyen?
44. Az $\{1 + 3n\}$ sorozatban az első tagtól kezdve hány tagot kell összeadni, hogy az összeg legalább 1000 és legfeljebb 1200 legyen?
45. Iktassunk 8 és 50 közé nyolc számot úgy, hogy a tíz szám számtani sorozatot alkosson!
46. Számítsuk ki a 4000-nél nem nagyobb és 25-tel nem osztható pozitív egész számok összegét!
47. Egy számtani sorozatban $a_1 = -210$ $a_n = 228$, a közbülső tagok összege 45. Írjuk fel a sorozat első tagját!
48. Egy számtani sorozatban $a_n = n$ $d = 5$ $S_n = -6$. Írjuk fel a sorozat első n tagját!
49. Egy számtani sorozat ötödik és kilencedik tagjának összege 14, a harmadik és hatodik tag összege pedig 24. Melyik sorozatról van szó?
50. Egy számtani sorozat második és ötödik tagjának szorzata -20 . A harmadik és a hatodik tag összege 5. Mennyi a sorozat első tagja és a differenciája?
51. Egy számtani sorozat első 3 tagjának összege 15, szorzata -120 . Melyik sorozatról van szó?
52. Ez egy négyezer éves feladat az egyiptomi matematikából. Osszunk szét öt ember között 100 cipót úgy, hogy a második ember ugyanannyival kapjon többet az elsőnél, mint a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél. Még azt is megkívánjuk, hogy a három legnagyobb rész együttesen 7-szer annyit tegyen ki, mint a két legkisebb összege.
53. Mennyi azon 3 nevezőjű törtek összege, amely törtek értéke 100-nál nem kisebb és 200-nál nem nagyobb?
54. Egy 6 tagú számtani sorozatban a tagok összege 90, és a legkisebb tagnak épp kétszerese a legnagyobb. Melyik számtani sorozatról van szó?
55. Egy sokszög szögei nagyság szerinti sorrendben: 120° , 125° , 130° ,... Hány oldala van a sokszögnek?
56. Mennyi az n értéke, ha egy számtani sorozat differenciája 3, az első elem n és az első n elem összege 235.
57. Egy számtani sorozat differenciája 0,5. Az első n elem összege 81. Az első $n+4$ elem összege 124, Mekkora az n értéke, és mi a sorozat első tagja?
58. Egy háromszög – amelynek van 120° -os szöge – oldalai számtani sorozatot alkotnak. Határozzuk meg az oldalak arányát!
59. Egy számtani sorozat első 100 tagjának összege 103, a következő 100 tag összege 300. Mennyi a sorozat első tagja és differenciája?

60. Bizonyítandó, hogy ha egy számtani sorozat első 9 elemének összege harmada a következő 9 elem összegének, akkor az első 99 elem összege is harmada a következő 99 elem összegének. Hogyan lehetne ezt az állítást általánosítani?

61. Bizonyítsuk be, hogy 17 szomszédos szám összege osztható 17-tel!
Igaz-e az állítás 17 helyett 16-ra?

62. Tudsz-e mondani három olyan számot, amelyek nem fordulhatnak elő ugyanabban a számtani sorozatban, azaz nincs olyan számtani sorozat, amelyben mindhárom szám szerepel?

63. Egy monoton növvő (végtelen) számtani sorozatnak eleme a 3 és az 5. Döntsd el az alábbi hét szám mindegyikéről, hogy az A, B, C állítások közül melyik igaz rá.

A hét szám: 111, 222, $9\frac{1}{9}$, 1001, $\sqrt{250}$, -7 , $\sqrt{10}$

A: biztosan szerepel a sorozatban

B: biztos, hogy nem szerepel a sorozatban

C: sem A, sem B nem teljesül.

64. Adj meg két szigorúan monoton növvő (végtelen) számtani sorozatot úgy hogy a) ne legyen közös elemük, b) csak egy közös elemük legyen!

Mértani sorozatok

65. Határozzuk meg a mértani sorozat első három tagját, ha

$$a_1 = 4, q = 2 \quad a_6 = 1, q = \frac{1}{2} \quad a_5 = -2, q = -\frac{1}{2} \quad a_8 = 2^8, q = -2$$

66. Mekkora lehet a mértani sorozat hányadosa, ha adott a következő két tagja?

$$a_2 = 1 \quad a_5 = 8 \quad a_5 = \sqrt{2} \quad a_7 = \sqrt{8} \quad a_3 = 1 \quad a_9 = 1 \quad a_5 = 2^{10} \quad a_8 = 4^2$$

67. Adjuk meg a mértani sorozat keresett elemét, ha ismerjük másik két elemét!

$$a_2 = 3 \quad a_3 = 4 \quad a_4 = ? \quad a_1 = 2 \quad a_3 = 8 \quad a_2 = ? \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_6 = 16 \quad a_8 = ?$$

$$a_5 = \frac{1}{8} \quad a_8 = 8 \quad a_6 = ?$$

68. Adjuk meg a mértani sorozat két eleméhez a közbeesőket, ha $a_4 = 1$ $a_7 = 1000$

$$a_4 = 1 \quad a_7 = 1000 \quad a_3 = -\frac{2}{3} \quad a_7 = -\frac{27}{8} \quad a_5 = -2 \quad a_{10} = 2$$

69. Számítsuk ki a mértani sorozat ötödik tagját, ha tudjuk, hogy $a_1 = \frac{1}{q}$ $q = a_1^2$

70. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a következő három szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme legyen.

$$1, \sqrt{a+1}, 2 \quad a-1, 4, 1 \quad a-1, 2, a+1 \quad a^2, 2a, \frac{4}{a} \quad 1, a+1, a^2-9$$

71. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját, a hányadosát és az első tíz tag összegét,
ha $a_2 = 10$ $a_5 = 270$!

72. Egy mértani sorozat első tagja 2, az n -edik tag 32, az első n tag összege 22. Írjuk fel a sorozat első négy tagját!

73. Egy mértani sorozatban $a_5 + a_6 = a_7 - a_5 = 48$. Az első tagtól kezdve hány tagot kell összeadni, hogy az összeg 1024 legyen?

74. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát!
$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 6 \\ a_3 + a_4 = 24 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} a_5 - a_1 = 80 \\ a_3 + a_1 = 10 \end{array}$$

75. Egy mértani sorozat első tagja 7, hányadosa 5. a) Szerepel-e a sorozatban 10-nek valamilyen hatványa? b) A sorozat hányadik tagja lesz harmincjegyű?

76. a) Egy mértani sorozat 79-edik tagja 150, a 80-adik tag 300. Mi a 82-edik tag?

b) Egy mértani sorozat 120-adik tagja 25, 122-edik tagja 100. Mi a 125-ödik tag?

d) Egy mértani sorozat 77-edik tagja 160, 80-adik tagja 40. Hányadik tagként szerepel a 2,5?

e) Egy mértani sorozat első három tagjának szorzata 64. Mi a második tag?

77. Egy mértani sorozat első eleme 243, n-edik eleme -32 , az első n elem összege 133, Meghatározandó a sorozat második tagja.

78. Egy mértani sorozat első 3 tagjának összege 19, a harmadik tag 5-tel nagyobb az elsőnél. Melyik sorozatról van szó?

79. Egy 7 tagú mértani sorozat első 4 tagjának összege 15, az utolsó 4 tag összege pedig 120. Melyik ez a sorozat?

80. Egy négytagú mértani sorozat két szélső tagjának összege 26, a két középső összege -6 . Mi a sorozat első tagja és hányadosa?

81. Egy mértani sorozat első négy tagjának összege 2, az első 8 tag összege 34, Mennyi a sorozat első tagja és hányadosa?

82. Tudsz-e mondani három olyan számot, amelyek nem fordulhatnak elő ugyanabban a mértani sorozatban (vagyis nincs olyan mértani sorozat, amelyben mind a három szám szerepel)?

83. Számítsuk ki a mértani sorozat első öt tagjának összegét!

$$a_1 = 2, q = 3 \quad a_1 = \frac{1}{2}, q = -1 \quad a_1 = 3, q = -2 \quad a_4 = 10, q = 3$$

84. Jelöljük a mértani sorozat első n elemének összegét S_n -nel. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját! $q = 2, S_5 = 31 \quad q = -2, S_5 = 66 \quad a_6 = 9a_2, S_5 = 49 \quad S_4 = 60, S_6 = 63$

85. Egy mértani sorozatban az első három tag összege 39, a szorzatuk 729. Határozzuk meg az első tagot és a hányadosát!

86. Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai mértani sorozatot alkotnak. Számítsuk ki a háromszög szögeit!

87. Egy mértani sorozatban $a_1 a_9 = 2304 \quad a_4 + a_6 = 120$. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját és hányadosát!

88. Egy szerszámgép vételára 5 420 000 Ft. A gép a használat következtében kopik. Mennyit ér a gép öt év múlva, ha az értékéből minden évben az előző évi érték 8%-át leírják?

89. Egy erdő faállománya $200\,000\,m^3$ volt. Tizenöt éven át átlagosan 5%-kal növekedett. A 15. év végén ritkítás volt, és kivágták a faállomány 10%-át. Ettől kezdve az évi növekedés 8%-os lett. A 18.

és 20. év végén ismét ritkítás következett. Öt százalékos növekedés és 10%-is ritkítás mellett hány m^3 fát termeltek ki a három ritkítás alkalmával?

90. Egy mértani sorozatban az első három tag összege 7, az ötödik, hatodik és hetedik tag összege $\frac{7}{16}$. Határozzuk meg az első tagot és a hányadost!

91. Adjunk meg olyan szigorúan csökkenő mértan sorozatot, amely legalább száz tagjának a reciprokat is tartalmazza.

92. Lehet-e egy nem konstans mértani sorozat minden tagja négyzetszám?

93. Adjunk meg olyan szigorúan monoton növekedő mértani sorozatot, amelynek végtelen sok racionális és végtelen sok irracionális tagja van!

94. Adjunk meg olyan mértani sorozatot, amelynek a 0 nem eleme és bármely két szomszédos tagjának az összege a tagokat követő elemmel egyenlő.

Vegyes feladatok számtani és mértani sorozatokkal

95. Három szám egyszerre alkot mértani és számtani sorozatot. Határozd meg az összes ilyen sorozatot!

96. Három szám számtani sorozatot alkot, összegük 45. Ha az első számhoz 2-t, a másodikhoz 3-at, a harmadikhoz 7-et hozzáadunk, mértani sorozatot kapunk, Mi volt a három szám?

97. Három szám mértani sorozatot alkot. Összegük 37. Ha az első számhoz 5-öt, a másodikhoz 4-et, a harmadikhoz 2-t hozzáadunk, számtani sorozatot kapunk. Melyik három számból indultunk ki?

98. Három szám mértani sorozatot alkot. Ha a harmadik számot 3-mal csökkentjük, számtani sorozatot kapunk, Ha még az első számot is csökkentjük 1-gyel, ismét mértani sorozathoz jutunk. Mi volt az eredeti három szám?

99. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, a_3, \dots$ pozitív tagokból álló mértani sorozat. Biztosak lehetünk-e abban, hogy $\lg a_n$ számtani sorozat? És abban, hogy $\sqrt{a_n}$ mértani sorozat?

100. Három szám számtani, a reciprokaik mértani sorozatot alkotnak. Adjuk meg az összes ilyen számhármast!

101. Három szám számtani, a négyzeteik mértani sorozatot alkotnak. Adjuk meg az összes ilyen számhármast!

102. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 30. Ha az első és a második tagot változatlanul hagyjuk, akkor egy mértani sorozat első három tagját kapjuk. Írjuk fel a számtani sorozat első öt tagját!

- 103.** Egy számtani és egy mértani sorozatnak közös az első két tagja. A mértani sorozat harmadik tagja 4-gyel nagyobb a számtani sorozat harmadik tagjánál, és 8-cal nagyobb a mértani sorozat első tagjánál. Írjuk fel mindkét sorozat első öt tagját!
- 104.** Egy számtani sorozat első három tagjának összege 15. Ha az első taghoz 1-et, a másodikhoz 4-et, a harmadikhoz 19-et hozzáadunk, akkor a kapott számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Írjuk fel a számtani sorozat első három tagját!
- 105.** Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 65, a következő öt tag összege 215. Határozzuk meg a sorozat első tagját és különbségét.
- 106.** Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 25. Az első, a második és az ötödik tag egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Melyik az a számtani sorozat?
- 107.** Egy számtani sorozat második és nyolcadik tagjának összege 2, kilencedik és harmadik tagjának különbsége 24. Mennyi az első tíz tag összege?
- 108.** Egy mértani sorozatban $a_3 - a_2 = 3$ és $a_3 - a_1 = -3$. Határozzuk meg a sorozat az első tagját.
- 109.** Van-e olyan mértani sorozat, amelynek az 1, a 2 és a 3 is tagja?
- 110.** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 35. Ha a harmadik számot öttel csökkentjük, egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Határozzuk meg a mértani sorozatot.
- 111.** Egy országban ma a lakosság 15 millió, 100 évvel ezelőtt 10 millió volt. Hány százalékos az évi átlagos szaporulat?
- 112.** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 52. Ha az első és a harmadik taghoz 2-t, a másodikhoz 10-et adunk, akkor egy számtani sorozat szomszédos elemeihez jutunk. Határozzuk meg a mértani sorozat hányadosát!
- 113.** Egy pozitív egészekből álló rendezett számnégyesről a következőket tudjuk: az első három szám egy számtani, az utolsó három szám egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A két szélső szám összege 28, a két középsőé 24. Melyik ez a négy szám?
- 114.** Adott két sorozat, az egyik 17, 21, 25,, a másik 16, 21, 26, A két sorozatban vannak közös elemek. Mennyi a közös tagokból álló sorozat első száz tagjának az összege?
- 115.** Tekintsük az $\left\{\frac{2n+12}{n+3}\right\}$ sorozatot ($n \geq 1$ egész szám). Határozzuk meg a sorozat összes olyan tagját, amelyek 3-nál nem kisebbek.
- 116.** Az y , x , $4x-5$, $7x+10$ olyan valós számokat jelölnek, melyekben az első három egy számtani sorozat, az utolsó három egy mértani sorozat három szomszédos eleme. Határozzuk meg a négy számot és adjuk meg a számtani sorozat különbségét, illetve a mértani sorozat hányadosát.
- 117.** Az a_n pozitív tagú számsorozatról azt tudjuk, hogy $a_1 = 1$, $a_4 = 0,125$ és $\log_5\{a_n\}$ számtani sorozatot alkot. Számítsuk ki az a_n sorozat 10. elemét.
- 118.** Adjunk meg olyan mértani sorozatot, amelyben bármely két szomszédos tag összege a tagokat követő elemmel egyenlő.

119. Legfeljebb hány prímszám lehet eleme egy olyan mértani sorozatnak, amelynek első eleme 1?
120. Egy háromszög egyik szöge százhusz fok, három oldalhossza pedig egy növekvő mértani sorozat három szomszédos tagja. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögű kerülete is tagja a mértani sorozatnak.

Kamatszámítás és kamatoskamat-számítás

121. Tíz éven át minden év elején 20 000 forintot helyezünk el a bankba. Mekkora lesz a tőke a 10. év végén, ha bank 8,5%-os kamatot fizet?
122. Egy bankba tett pénzösszeg évi 8%-os kamat mellett hány év alatt nő húszszorosára?
123. Egy gyár termelése minden évben ugyanannyi százalékkal emelkedett. 15 év leforgása alatt a termelés a nyolcszorosára nőtt. Hány százalékos volt a növekedés évről-évre?
124. Az A üzem évi termelése háromszorosa a B üzem termelésének. Az A üzemben évi 10%-os, B-nél évi 15 %-os növekedést irányoztak elő. Ha minden a terv szerint halad, hány év múlva éri utol a B üzem évi termelése az A üzemét?
125. Tíz éven át minden év elején betettem a bankba 6000 Ft-ot, Mennyit ér a betétkönyv a tizedik év végén, ha a kamat 5 %?
126. 200 000 Ft-ot kaptam kölcsön évi 7%-os kamatra. 20 év alatt kell visszafizetnem évi egyenlő részletekben. Egy év elteltével fizetek először. Mekkora az évi törlesztés értéke?
127. 300 000 Ft-om van egy 5%-os betétkönyvben. Minden év elején kiveszek 16 000 Ft-ot, Hány év alatt fogy el a pénzem? Az első 16 000 Ft-ot akkor veszem ki, amikor a 300 000 Ft már egy éve bent fekszik.
128. Hány év alatt duplázódik meg 8%-os kamatláb mellett a) 3000 Ft, b) 2 500 000 Ft?
129. Egy bank az első évben 15%, a második évben csak 11% kamatot fizet a bennlévő összegre, amelyhez a két év során se hozzá nem tettünk, se el nem vettünk. Mekkora az átlagkamat?
130. Mekkora a törlesztő részlete annak a 2 000 000 forintos áruvásárlási kölcsönnek, amelyet január elsején öt évre veszünk fel évi 27%-os kamatos kamatra? A következő évtől minden évben január elsején történik a visszafizetés egyenlő részletekben.
131. Legalább mekkora éves átlaghozammal kell befektetni 400 000 forintot, hogy tíz év múlva ki tudjunk fizetni 1 000 000 forintot?
132. Mikor kell befektetnie annak a szülőnek, aki azt szeretné, hogy gyermeke 25 éves korában egymillió forintot kapjon, ha évi 10%-os átlaghozammal számol és a) egyszeri induló befektetésként 300 000 forintot fektet be, b) minden év elején 50 000 forintot fektet be?
133. Ötvenezer forintot szeretnénk hét évre befektetni. Három befektetés közül választhatunk. **1.** Minden év végén hozzáteszünk a pénzünkhöz egy fix összeget, 7500 forintot, ami az eredeti összeg 15%-a. **2.** 11%-os kamatos kamatot fizetnek. **3.** az első évben 17% kamatot kapunk, a következőben 15%-ot, majd 13%-ot, így csökken a kamat, amíg el nem éri a 7%-ot, ennyit kamatozik az utolsó évben is. Melyik befektetés a legkedvezőbb?

- 134.** Mennyi pénzt fizetnénk ma egy olyan értékpapírért, amely öt év múlva fizet 100 000 forintot – közben nincs kifizetés –, ha feltesszük, hogy az évi átlagos elvárt hozam 10%?
- 135.** Hány év alatt növekszik egy 100 000 forint értékű betét 1 000 000 forint értékűre, ha évi 15%-os kamattal számolunk?
- 136.** Egy értékpapírt, amelyik öt év múlva fizet 1 000 000 forintot, ma vettünk meg 500 000 forintért. Mekkora éves átlaghozamot jelent ez a befektetés számunkra, ha az értékpapírt a lejáratig megtartjuk?
- 137.** Hány éven át kell évi 50 000 forintot befizetni 12%-os éves kamatláb mellett, ha az utolsó befizetés utáni év végén egymillió forinttal szeretnénk rendelkezni?
- 138.** Mekkora volt az induló tőke, ha az 10 év alatt 10% kamatozással negyedéves kamatozási periódus mellett 402 760 forintra nőtt?
- 139.** A négy befektetés közül melyik a legelőnyösebb? **1.** A pénzt évi 21%-os kamatra tesszük be, és évenként tőkésítenek. **2.** A pénzt évi 20%-os kamatra tesszük be és félévente tőkésítenek. **3.** A pénzt évi 19,5%-os kamatra tesszük be és havonta tőkésítenek. **4.** A pénzt évi 20%-os kamatra tesszük be, és naponta tőkésítenek.
- 140** Minden év elején 450 000 forintot helyezünk el a bankba éves 6,5%-os kamatra. a) Mennyi pénz gyűlik össze a hatodik év végén? b) Hány év alatt gyűlik össze 6 millió forint?
- 141.** Mekkora összeget kell öt éven át minden év elején a bankba elhelyeznünk évi 15%-os kamat mellett, ha azt akarjuk, hogy az ötödik év végén ugyanannyi legyen a követelésünk, mintha az első év elején egyszerre 300 000 forintot tettünk volna be ugyanekkorra kamatra?
- 142.** Tóbiás király (akit a mesében a nép csak Palacsintás királynak nevez) nagyon elszegényedett, ezért kénytelen volt január elsején a Derelye főszakács érdekeltségi köréhez tartozó banktól 8 millió fabatka kölcsönt felvenni. A Derelye Bank 12 évi futamidőre, évi 9%-os kamatra adta a kölcsönt, és ezt minden év végén egyenlő összegekkel kell visszafizetnie a királynak. Mennyi lesz az évente visszafizetendő törlesztőrészlet? Mennyi pénzt fizet vissza összesen 12 év alatt a király?
- 143.** Az Örökzöld faiskolában 7000 fenyőfa van. Évente kivágják a meglévő állomány 12%-át, ugyanakkor 600 új fenyőt is ültetnek. A főkertész úgy látja, hogy ez egy jó gondolat és így soha nem fog el a készletük. A kertészet könyvelője viszont aggódik, szerinte ebből előbb-utóbb probléma lesz, és elfogynak a fenyők. Kinek van igaza?
- 144.** Fekete úr élete során, amíg aktív dolgozó volt, keresetéből az önkéntes nyugdíjpénztárba is befizetett, hogy majd nyugdíjasként használja fel a megtakarítását. Nyugdíjba menetelekor kétféle millió forintja van a bankban. Ezt a pénzt továbbra is a bankban hagyja, s leköti évi 6%-os kamatra. Minden hónapban egy ugyanakkora összeget akar felvenni. Tegyük fel, hogy december 31-én megy nyugdíjba, és először február elsején veszi fel a járadékot. Mekkora összeget vehet k havonta Fekete úr, ha azt szeretné, hogy a harmincadik év végén fogyjon el a bankban levő pénze?
A bankban havonta számolják fel a bent levő összeg után járó kamatot, s ezt minden hónapban hozzáadják a már bent levő összeghez. A havi kamat az éves kamat tizenketted része.
- 145.** Ha elhelyezünk egy bankban 180 000 forintot évi 7%-os kamatos kamatra, akkor tíz év múlva mekkora összeghez jutunk?

146. A madártani szakember azt tapasztalták, hogy az utóbbi években csökkent a hazánkban fészkelő fecskék száma. A csökkenés évente 13% volt. Ha így folytatódik a folyamat, hány év múlva számíthatunk fele annyi kecskére, mint ebben az évben?

147. Pénzes Dénes egy bankban tartotta a pénzét 6 évig. Hat éve lekötött 4,8 millió forintot, most pedig felvett 6 506 300 forintot. A bank minden évben azonos kamatot adott. Mennyi volt az éves kamat?

148. Szerencsés flótás a szilveszteri tombolán nyert százmillió forintját január elsején egy bankban helyezi el, ahol éves 5 % kamatot fizetnek. Úgy dönt, hogy húsz év alatt fogja felhasználni a nyereményt, mégpedig úgy, hogy minden év elején azonos összeget fog kivenni a bankból. Mekkora összeget vehet fel évente, ha 20 év múlva alatt pénze a bankban?

149. Egy fiatal család lakásépítésre felvesz 15 millió forint kölcsönt 15 évre évi 8 százalékos kamatra.
a) Mennyi lesz a havi törlesztőrészletünk, ha havonta egyenlő összeget kell visszafizetni, és a havi kamat az éves kamat tizenketted része?

b) Mennyi lenne a törlesztő részlet, ha a bank évente azonos összeget kérne, de azt 12 egyenlő részletben?

c) Mindkét esetben számítsuk ki, hogy a felvett összegnek hányszorosát fizetik vissza.

Korlátosság és monotonitás

150. Határozzuk meg a következő sorozatok egy alsó korlátját!

$$a_n = (-1)^n \quad b_n = 1 - \frac{1}{n} \quad c_n = 2^{\frac{1}{n}} \quad d_n = n^2 - 100n \quad e_n = \frac{\sin n}{n}$$

151. Határozzuk meg a következő sorozatok egy felső korlátját!

$$a_n = \frac{1}{n} \quad b_n = -|n| \quad c_n = 1 + \sqrt[n]{100} \quad d_n = -n^2 + 100n \quad e_n = \frac{\sin n}{n+1}$$

152. Határozzuk meg a következő sorozatok legnagyobb alsó korlátját!

$$a_n = \frac{n-1}{n} \quad b_n = \frac{3n-7}{7-3n} \quad c_n = 2^{-n} \quad d_n = \sqrt[n]{n}$$

153. Határozzuk meg a következő sorozatok legkisebb felső korlátját!

$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad b_n = \frac{2n-3}{n+2} \quad c_n = \frac{3n-2}{3-2n} \quad d_n = 3 - \sqrt[n]{n}$$

154. Korlátosak-e a következő sorozatok? Ha igen, akkor bizonyítsuk be, ha nem, akkor ezt bizonyítsuk be. $a_n = \frac{n+3}{n+2}$ $b_n = \frac{n^2-1}{10n}$ $c_n = (-2)^n$ $d_n = \sqrt[n]{n}$ $e_n = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}$

155. Lássuk be, hogy az $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ és a $b_n = \frac{1-n}{1+n}$ sorozatok felülről korlátosak.

156. Lássuk be, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$ és a $b_n = \frac{2n-3}{n}$ és a $c_n = \frac{n+4}{n+2}$ és a $d_n = \frac{n^2+1}{n^2+4}$ sorozatok korlátosak.

157. Lássuk be, hogy az $a_n = \frac{n}{n+1}$ és a $b_n = n^2$ sorozatok szigorúan monoton növekedők.

158. Igazoljuk, hogy a következő sorozatok monoton sorozatok.

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad b_n = n^2 - 2n \quad c_n = \cos \frac{\pi}{n}$$

159. Vizsgáljuk monotonitás szempontjából a következő sorozatokat!

$$a_n = \frac{1}{2n} \quad b_n = \frac{n}{n+1} \quad c_n = \frac{n^2-1}{n} \quad d_n = -n^2 + 1 \quad e_n = \cos \frac{\pi}{n}$$

160. Írjuk fel a sorozatok első öt tagját és vizsgáljuk a sorozatokat monotonitás szempontjából.

$$\left\{ \sin n \frac{\pi}{2} \right\} \quad \left\{ \frac{n^2-1}{n} \right\} \quad \left\{ \frac{n+2}{n} \right\} \quad \left\{ \frac{n-2}{n+3} \right\}$$

161. Vizsgáljuk az előző feladat sorozatait sorozatok korlátosság szempontjából.

162. Lássuk be, hogy ezek monoton és korlátos sorozatok.

$$a_n = 10^{-n} \quad b_n = \frac{n+1}{n} \quad c_n = \frac{1-n}{n} \quad d_n = \sin \frac{\pi}{2n}$$

V. Sorozatok határértéke

A határérték definíciója

Véges határérték

Mit jelent az, hogy az a_n sorozat a c számhoz tart?

Első megközelítés

A sorozat tagjainak túlnyomó többsége jó közel van c -hez.

Második megközelítés

Az a_n sorozat határértéke c , ha valahonnan kezdve a sorozat *összes tagja borzasztó közel* van c -hez.

Harmadik megközelítés

Megadunk egy konkrét pici ε számot. Kiszámítjuk, hogy a sorozat hányadik tagjától kezdve teljesül, hogy a sorozat tagjai közelebb vannak c -hez, mint ε . Azaz hányadik tagtól kezdve teljesül, hogy $c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$.

Negyedik megközelítés

Az a_n sorozat határértéke c , ha nem csak egyetlen ε -hoz, hanem minden pozitív ε számhoz kiszámolható, hogy hányadik tagtól kezdve lesz a sorozat összes tagja benne a c szám ε sugarú környezetében.

Megjegyzések

1. „Hányadik tagtól kezdve?” – az erre adott válasz a küszöbindex.

2. Az a lényeges, és egyben érdekes, hogy egészen picike ε számokhoz is megadható a küszöbindex, amelyre teljesül, hogy valahonnan kezdve a sorozat összes tagja *borzasztó közel* van c -hez.

3. A nagy ε értékekhez nem nagy kunszt, hogy található olyan küszöbindex, hogy onnan kezdve a sorozat összes tagja benne van a c szám ε sugarú környezetében.

A véges határérték precíz definíciója

Hosszabb („mesés”) változat

Az a_n sorozat a c számhoz tart, ha bármely pozitív ε szám esetén n -nek van olyan értéke, amelynél nagyobb indexű elemei a sorozatnak mind beleesnek a c szám ε sugarú környezetébe.

Rövidebb („képletszerű”) változat

Az a_n sorozat a c számhoz tart, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz megadható egy olyan n_0 , amelyre teljesül, hogy ha $n > n_0$, akkor $c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$.

Még rövidebb változat

Az a_n sorozat a c számhoz tart, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz megadható olyan n_0 , amelyre teljesül, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_n - c| < \varepsilon$.

Megjegyzések

1. Az a_n sorozat konvergens, ha van véges határértéke.
2. Egy a_n sorozatról úgy tudjuk belátni, hogy a c számhoz tart, ha minden pozitív ε számhoz keresünk és találunk egy a definíciót kielégítő n_0 küszöbindexet. Ha csak egy vagy kettő konkrét ε -hoz keresünk (és találunk) ilyen küszöbindexet, az még nem elég.
3. Más és más ε -hoz más és más küszöbindex tartozik, azaz a küszöbindex függ az ε -tól.
4. Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, másképpen $a_n \rightarrow c$, ha $n \rightarrow \infty$

Végtelenhez és mínusz végtelenhez tartó sorozatok

Definíció

Az a_n sorozat a végtelenhez tart, ha bármely K számhoz van olyan n_0 , hogy ha $n > n_0$, akkor $a_n > K$

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, vagy $a_n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$

Definíció

Az a_n sorozat a mínusz végtelenhez tart, ha bármely P számhoz van olyan n_0 , hogy ha $n > n_0$, akkor $a_n < P$.

Jelölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, vagy $a_n \rightarrow -\infty$, ha $n \rightarrow \infty$

Feladatok

1. A következő sorozatok esetében számítsuk ki $\varepsilon = 0,1$ -hez, $\varepsilon = \frac{1}{50}$ -hez, $\varepsilon = 0,001$ -hez tartozó küszöbindexet. $a_n = \frac{7n+4}{n}$, $b_n = \frac{1}{2n-3}$, $d_n = \frac{4n+1}{n}$, $e_n = \frac{5}{n^2+2}$, $f_n = 2 + \frac{1}{n}$

2. Sejtsük meg a következő sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsuk be a sejtésünket.

$$a_n = \frac{4n+2}{2n-1}, b_n = \frac{3n-2}{n}, c_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}, d_n = \frac{4n+100}{2n-3}, e_n = \frac{2n-1}{3n}, f_n = \sqrt[n]{2}, g_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$$

3. Az $a_n = \frac{n+2}{2n-8}$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a 0,5-nek az egyszázad, illetve egytizedred sugarú környezetébe?

4. Lássuk be, hogy $a_n = \frac{n^2-1}{2n^2+1} \rightarrow \frac{1}{2}$, azaz keressünk minden pozitív ε -hoz a definíciót kielégítő küszöbindexet.

5. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 3 \right) = 3$, azaz keressünk minden pozitív ε -hoz a definíciót kielégítő küszöbindexet.

6. Sejtsük meg az $a_n = \frac{n+3}{2n-5}$ sorozat határértékét, majd vizsgáljuk, hogy az $a_n = \frac{n+3}{2n-5}$ sorozatban hányadik tagtól kezdve esnek a sorozat tagjai az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumba, ahol A a sorozat határértéke. Érdemes először felvenni két-három konkrét kicsi ε -t, így megkeresni a küszöbindexet, és csak utána általánosítani.

7. Tudjuk, hogy $a_n \rightarrow c$, számítsuk ki a megadott ε -hoz tartozó küszöbindexet.

$$a_n = \frac{n+3}{n+2} \quad c=1, \quad \varepsilon=0,1 \qquad b_n = \frac{5n^2+20}{n^2-100} \quad c=5, \quad \varepsilon=0,01$$

8. Sejtsük meg a következő sorozatok határértékét, majd számítsuk ki $\varepsilon=0,001$ -hez tartozó küszöbindexet $a_n = \frac{7}{2n+3}$, $b_n = \frac{5n-3}{4n+1}$, $c_n = \frac{5-3n}{7n-2}$

9. Igazoljuk a határérték definíciója alapján, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-3} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-3} = 0 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{2} = 2 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3n-2} = \frac{2}{3}$$

10. Sejtsük meg a következő sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsuk be a sejtésünket. $a_n = \frac{n^2+5}{2n^2-1}$ $b_n = \frac{4n+5}{2n}$ $c_n = \sqrt{1+\frac{100}{n}}$ $d_n = \frac{n+3}{2n}$

11. Igazoljuk a határérték definíciója alapján, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3) = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} + 2 = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3) = \infty$$

12. Lássuk be ezt a szám nélküli, nagyon szép látványt nyújtó egyenlőséget: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg n = \infty$

13. Igazoljuk a határérték definíciója alapján, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+3} = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(n+3) = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3(n-1) = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2-3) = \infty \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \lg \lg n = \infty$$

14. Egy konvergens sorozatnak végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja van. Igazoljuk, hogy a sorozat határértéke nulla.

15. Lássuk be, hogy ha az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 1, a $\{b_n\}$ sorozaté 2, akkor a két sorozatnak nem lehet végtelen sok közös eleme.

16. Ekvivalens-e a határérték definíciójával valamelyik állítás?
 a) c bármely környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van
 b) c bármely környezetén belül a sorozatnak végtelen sok tagja van.
17. Adjuk meg a definícióját annak, hogy egy sorozat nem korlátos?
18. Igaz-e, hogy ha $\{a_n\}$ monoton növekedő és nem korlátos, akkor $a_n \rightarrow \infty$?
19. Konvergens-e a füzérhosszak sorozata?
20. $\{a_n\}$ pozitív tagú, 0-hoz tartó sorozat. Mit állíthatunk az $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ sorozatról?
21. Minden n -re $a_n > n$. Következik-e ebből, hogy $a_n \rightarrow \infty$?
22. Van-e olyan sorozat, amelynek van a) két különböző, b) három különböző, c) végtelen sok különböző számhoz konvergáló részsorozata?
23. Adjunk példát olyan szigorúan monoton növekedő sorozatra, amelynek határértéke 100.
24. Igaz-e, hogy minden pozitív elemű monoton csökkenő sorozat konvergens?
25. Bizonyítsuk be: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{5n-1} = \frac{4}{5}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n+2}{7n^2+2n-1} = \frac{2}{7}$
26. Adjunk meg a definícióban szereplő $\varepsilon = 0,01$ -hez a megfelelő küszöbindexet.
- $$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad b_n = \frac{1}{\log_2 n}$$
27. Vizsgáljuk monotonitás szempontjából: $a_n = n^2 + 4n - 5$ $b_n = n^2 - 8n - 9$
28. Korlátos-e? $s_n = \frac{5-n}{n+4}$
29. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$
30. Legyen a_n egy pozitív tagú sorozat. Az alábbiak közül melyikből következik melyik?
 I. A sorozatnak nincs legkisebb eleme
 II. Minden pozitív ε -hoz található egy olyan n , amelyre $a_n < \varepsilon$
 III. $a_n \rightarrow 0$
31. Bizonyítsuk be, hogy ha $r_n \rightarrow b$ és az r_n sorozatot véges idő alatt átrendezzük (azaz bizonyos tagjait össze-vissza felcseréljük), akkor az így kapott sorozat is b -hez tart.
32. Bizonyítsuk be hogy $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n^2} \rightarrow 0$
33. Mi a következő két állítás kapcsolata? I. a_n felülről nem korlátos, II. $a_n \rightarrow \infty$
34. Lássuk be: $\log_{0,5}(n-1) = -\infty$ $-\sqrt{n-3} \rightarrow -\infty$
35. Lássuk be, hogy ha egy sorozat a végtelenhez tart, akkor a sorozat elemeinek reciprokai egy nullához konvergáló sorozatot alkotnak.

36. Bizonyítsd be a definíció alapján, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+1} = 3$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+4}{2n^2+1} = 0,5$

37. Sejtsük meg a következő végtelen összeget: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

38. Számítsuk ki a következő végtelen összeget, ha konvergens: $6 - 3\sqrt{3} + \frac{9}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} + \dots$

39. Határozzuk meg és bizonyítsuk be a definíció alapján a következő határértéket: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_2 n}$

40. Egy négyzetet 9 egybevágó négyzetre osztunk, majd a középsőt (képzeletben) kivágjuk. A megmaradt nyolc négyzettel ugyanezt megcsináljuk: 9 egybevágó kis négyzetre osztjuk őket, és mindegyikből a középsőt elhagyjuk. Az így megmaradt $8 \times 8 = 64$ kis négyzettel ugyanezt megcsináljuk. Ha ezt a végtelenségig folytatjuk, akkor mekkora a megmaradó (tehát a ki nem vágott) területek összege? Mekkora a kivágott területek összege?

41. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^4} + \dots = \frac{1}{k-1}$, ha k pozitív egész szám.

42. Írjuk fel az $\frac{1}{49}$ törtet tizedestört alakban 20-25 tizedesjegyre. Igen érdekes dolgot tapasztalunk. Tegyük fel ezzel kapcsolatban kérdéseket.

43. Bizonyítsd be a definíció alapján, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{2n} = 2$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{500}{n}} = 1$

44. Bizonyítsd be a rendőr-elvvel: $\frac{6n+2}{n^3} \rightarrow 0$ $\frac{2n^2+n+5}{n^4+20} \rightarrow 0$

45. Lássuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+3} = \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(n+c) = \infty$

46. Melyikből következik melyik? $a_n - b_n \rightarrow 0$ $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

47. Vizsgáljuk, hogy két végtelenhez tartó sorozat hányadosából álló sorozatnak mi lehet a határértéke?

48. Vizsgáljuk, hogy egy nullához és egy végtelenhez tartó sorozat szorzatából álló sorozatnak mi lehet a határértéke?

49. Alkossuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ definícióját.

50. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} = 1$

51. Igaz-e, hogy minden konvergens sorozat véges sok tag elhagyásával monotonná tehető?

52. Lássuk be a 49. feladatban megalkotott definíció alapján, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{0,5}(n-3) = -\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{n-3}) = -\infty$$

53. Mennyi? $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} + 1}{3 + 0,9^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sqrt[n]{3})(2 + \sqrt[n]{3})}{\sqrt[n]{5}}$

54. Legyen b_n az n szám pozitív osztóinak összege. Lássuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

55. Lássuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$

56. Egy végtelen sorozatból bizonyos elemek (esetleg végtelen sok) elhagyásával keletkező végtelen sorozatot az eredeti sorozat részsorozatának nevezzük. Lássuk be, hogy egy $\{a_n\}$ konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens és a határértéke ugyanaz, mint az $\{a_n\}$ sorozaté.

57. Valahogy sejtjük meg a határértéket, majd igazoljuk sejtésünket határérték definíciója alapján, vagy a rendőr-elvvel, vagy a határértéktételek segítségével.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n}{5n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + n^2 + 1}{n^4 + 1000}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 10}{4n^2 - 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 2}{3n - 4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 4n)$$

58. Lássuk be, hogy ha az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatok konvergenssek és határértékük egy közös c szám, akkor a két sorozat „összefésüléséből” keletkező $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ sorozat is konvergens és a határértéke ugyanaz a c szám.

59. Igazoljuk, hogy egy monoton növekedő sorozat vagy konvergens, vagy a végtelenhez tart.

60. Lehet-e két divergens sorozat összege, illetve szorzata konvergens?

61. Mit mondhatunk az $\{a_n b_n\}$ sorozat konvergenciaviselkedéséről, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, a $\{b_n\}$ sorozat pedig tetszőleges?

62. Írjuk fel a 0,47474747 ... végtelen szakaszos tizedestörtet

a) végtelen összeg alakban

b) az előző eset folytatásaképpen két egész szám hányadosaként. Oldjuk meg ugyanezt a feladatot a 0,5132323232... végtelen tizedestörttel is.

63. Valahogy sejtjük meg a határértéket, majd igazoljuk sejtésünket a határérték definíciója alapján, vagy a határértéktételek segítségével.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (0,001n^3 - 1000000)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lg(n+1) - \lg n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4n + 1}{n^2 + 6n + 10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^5 - 2n^4 + 8n^2 - 3n}{2n^5 - 4n^3 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1}$$

64.* Sejtjük meg, mi lehet a következő sorozat határértéke: $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

65.* Állapítsuk meg a következő sorozatról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor mi a határértéke?
 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

66.* Egy sorozatot a következőképpen adunk meg: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$. Adjuk meg képpel a_n -et és határozzuk meg a határértékét.

67.* Igazoljuk, hogy ez a sorozat konvergens: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

68. Bizonyítsuk be, hogy a)-ból és b)-ből következik c).

a) Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

b) Minden monoton korlátos sorozat konvergens.

c) Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

69. Bizonyítsuk be a következő határértékeket úgy, hogy minden pozitív ε -hoz meghatározzuk a

megfelelő n_0 küszöbindexet. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{2n-1} = 2$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n} = 3$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+100}{2n-3} = 2$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = 1$

70. Sejtsük meg a következő határértékeket, majd a sejtésünket bizonyítsuk be a definícióval.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} + 2)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(n-100)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg \lg n$

71. Lássuk be rendőr elvvel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3+1} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2+2}{n^3} = 0$

72. Lássuk be, hogy ha egy sorozat egyhez tart, egy másik kettőhöz, akkor ennek a két sorozatnak nem lehet végtelen sok közös eleme.

73. Végtelen sok n -re teljesül, hogy egy sorozatban $a_{n+1} \geq a_n$. Lehetséges-e, hogy $a_n \rightarrow -\infty$?

74. Egy sorozatban $a_{n+1} - a_n$ akármilyen nagy lehet, azaz felülről nem korlátos. Lehetséges-e, hogy $a_n \rightarrow -\infty$?

75. Határozzuk meg a következő határértékeket.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n+3}{11n-7}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-5n}{9n-22}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2n^2-5n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{13n^2-4n+1}{7n+100}$$

75. Határozzuk meg a következő határértékeket. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{n^2+5}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+5}}{1+\sqrt{9n+1}}$$

76. Képzeljük el a következő alakzatot. Induljunk ki egy négyzetből, harmadoljuk minden oldalát, és a középső harmadokra kifelé rajzoljunk újabb négyzeteket. Az így létrejött külső határoló szakaszokat ismét harmadoljuk, majd a középső harmadokra kifelé rajzoljunk négyzeteket, és így tovább, folytassuk a végtelenségig az eljárást. Mekkora a végül kialakuló alakzat területe és kerülete?

Elméleti áttekintés

Definíciók, fogalmak, példák

1. A véges határérték definíciója, és a hozzátartozó megjegyzések. A végtelen és a mínusz végtelen határérték definíciója
 2. Megadott (véges vagy végtelen vagy mínusz végtelen) határértékek bizonyítása a definíció alapján
 3. Adott határértékek bizonyítása a rendőrlévvel
- Példák olyan sorozatokra, amelyeknek van több különböző számhoz konvergáló részsorozata
4. A nem korlátosság definíciója (IX.2.)
 5. Mi a csuda az irracionális szám?
 6. A π , mint egy sorozat határértéke
 7. Végtelen sor, részletösszeg, n -edik részletösszeg, a részletösszegek sorozata, végtelen sor konvergenciája, végtelen sor összege, végtelen mértani sor
 8. Hogyan állítható elő egy (konkrét) végtelen szakaszos tizedes tört egy végtelen mértani sor összegeként?

Állítások, tételek

9. Ha egy sorozat határértéke pozitív, akkor a sorozat legfeljebb véges sok negatív számot tartalmaz.
10. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.
11. A konstans sorozat konvergens.
12. Ha két különböző sorozat két különböző számhoz konvergál, akkor a két sorozatnak nem lehet végtelen sok közös eleme.
13. Ha egy sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens.
14. Ha egy konvergens sorozat végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív számot tartalmaz, akkor a határértéke 0.
15. Ha minden n -re $a_n > n$, akkor $a_n \rightarrow \infty$. (IX.6.)
16. Kritikus határértékek: mi lehet a végtelenhez tartó sorozatok hányadosának határértéke, illetve a nullához és a végtelenhez tartó sorozatok szorzatának határértéke?
17. Legyen a_n egy pozitív tagú sorozat. (IX.15.). Ha $a_n \rightarrow 0$, akkor minden pozitív ε -hoz található egy olyan n , amelyre $a_n < \varepsilon$. Ennek a megfordítása nem igaz. Ha minden pozitív ε -hoz található egy olyan n , amelyre $a_n < \varepsilon$, akkor a sorozatnak nincs legkisebb eleme. Ennek a megfordítása nem igaz.
18. Ha $a_n \rightarrow 0$, akkor a sorozatnak nincs legkisebb eleme. Ennek a megfordítása nem igaz.
19. Az $\sqrt[n]{a}$ sorozat korlátos és szigorúan monoton csökkenő, ha $a > 1$.
20. Az e -hez tartó sorozat konvergens.
21. Lehetséges, hogy $a_{n+1} > a_n$ végtelen sok n -re, és $a_n \rightarrow -\infty$.
22. Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
23. Ha $r_n \rightarrow b$ és az r_n sorozatot véges idő alatt átrendezzük (azaz bizonyos tagjait össze-vissza felcseréljük), akkor az így kapott sorozat is b -hez tart.

24. Ha egy sorozat a végtelenhez tart, akkor felülről nem korlátos.
25. Nem igaz, hogy ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor a végtelenhez tart.
26. A végtelen mértani sor konvergencia, ha a mértani sorozat hányadosa -1 és 1 között van, és az összeg $a_1 / (1 - q)$.
27. A rendőrelv
28. A határértéktételek
29. Minden sorozatnak van monoton részsorozata.
30. Az e -hez tartó sorozat monoton és korlátos.
31. A q^n sorozat konvergenciaviselkedése q -tól függően
32. A Cantor-axióma
33. Minden végtelen szakaszos tizedes tört előállítható egy végtelen mértani sor összegeként.

VI. Az egyenes koordináta geometriája

Előzmények

első- és másodfokú függvények ábrázolása, a meredekség fogalma, É.T., É.K., helyettesítési érték, hol metszi a függvénygrafikon a tengelyeket, pont illeszkedése egy függvénygrafikonra, függvénytranszformációk, adott egyenes hozzárendelési szabályának leolvasása, párhuzamos egyenesek, kétismeretlenes egyenletrendszerek algebrai és grafikus megoldása, adott szakasz felezőpontjának és harmadolópontjának koordinátái, háromszög súlypontjának koordinátái, két pont távolsága, egymásra merőleges vektorok, egymással párhuzamos vektorok

1. Számítsuk ki a háromszög területét, ha csúcsainak koordinátái
 a) $A(2, 3) \quad B(5, 7) \quad C(10, -3)$ b) $A(3, 4) \quad B(-4, -6) \quad C(5, -1)$
2. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a $P(-1, 6)$ pont illeszkedjen az $5x - y = a$ egyenletű egyenesre.
3. Adjuk meg a $3x + 5y = 15$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amelynek kétszer akkora az abszcisszája, mint az ordinátája.
4. Számítsuk ki a következő egyenesek metszéspontjának a koordinátáit.
 a) $x + 2y = 12 \quad 5x - 3y = -5$ b) $2x + 7y - 8 = 0 \quad 9x - 4y + 35 = 0$
5. Számítsuk ki a háromszög csúcspontjainak a koordinátáit, ha oldalegyeneseinek egyenletei
 $4x - 5y = -13 \quad 7x + 2y = 31 \quad 3x + 7y = 1$
6. Igazoljuk, hogy a következő pontok paralelogrammát határoznak meg:
 a) $A(1, 3) \quad B(4, 7) \quad C(2, 8) \quad D(-1, 4)$ b) $A(1, 2) \quad B(-5, 1) \quad C(-6, -\frac{1}{2}) \quad D(0, \frac{1}{2})$

7. Az $f(x) = ax + b$ függvényre $f(0) = -3$, $f(4) = 5$. Határozzuk meg a és b értékét.

8. Az $f(x) = ax + b$ függvényre $f(-2) = 5$, $f(3) = -5$. Határozzuk meg a és b értékét.

9. Igazoljuk, hogy a következő pontok derékszögű háromszöget határoznak meg:

$$A(7, 4) \quad B(0, -5) \quad C(-2, 1)$$

10. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{l} a) \quad 2x + \frac{7}{3}y = 2 \\ \quad 2x - \frac{7}{3}y = -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b) \quad 3y = 3 - 2x \\ \quad -x + \frac{3}{2}y + 1 = \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c) \quad \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1 \\ \quad \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{array}$$

Az egyenes

11. Adott ponton átmenő, adott irányvektorú egyenes egyenletét keressük.

$A(1, 3)$	$B(-2, -3)$	$C(2, 4)$	$D(-2, 2)$
$\mathbf{v}(1, 1)$	$\mathbf{v}(2, 1)$	$\mathbf{v}(4, 3)$	$\mathbf{v}(-2, -3)$

12. Adott ponton átmenő, adott normálvektorú egyenes egyenletét keressük.

$A(1, 3)$	$B(6, 1)$	$C(5, 0)$	$D(5, 2)$
$\mathbf{v}(-2, 1)$	$\mathbf{v}(2, 3)$	$\mathbf{v}(-3, 5)$	$\mathbf{v}(-1, 4)$

13. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a C ponton és párhuzamos a D és E pontokon áthaladó egyenessel.

$$C(-2, 3), D(-4, -2), E(1, 2) \qquad C(2, 6), D(-2, 4), E(1, 3)$$

14. Írjuk fel a $(2, 3)$ pontból az $x - y = 4$ egyenesre bocsájtható merőleges egyenletét.

15. Egy háromszög egyik csúcsa $A(1, 2)$, a másik két csúcsból induló magasságvonal egyenlete $2x - 3y + 1 = 0$, illetve $x + y = 0$. Számítsuk ki a B és a C csúcsok koordinátáit.

16. Írjuk fel a P ponton átmenő, és az e egyenessel párhuzamos egyenes egyenletét.

$$P(2, 3), \quad 4x - 5y = 21$$

17. Írjuk fel az egyenes egyenletét, és ábrázoljuk az egyenest, ha

- a) átmegy az $A(0, 0)$ ponton, és az irányvektora $\mathbf{v}(5, 2)$
- b) átmegy az $B(0, 5)$ ponton, és az irányvektora $\mathbf{v}(-3, 2)$
- c) átmegy az $C(-4, 0)$ ponton, és az irányvektora $\mathbf{v}(2, 3)$
- d) átmegy az $P(0, 0)$ ponton, és az irányvektora $\mathbf{v}(-3, 8)$

18. Írjuk fel a két ponton átmenő egyenes egyenletét.

$$A(4, 3), B(9, 6) \qquad A(1, 6), B(-3, -1) \qquad A(-2, -3), B(4, -1) \qquad A(5, 0), B(5, 8)$$

19. Adjuk meg az egyenes irányvektorát.

$$x - y = -3 \quad 2x + y = -1 \quad 3x + 2y = 10 \quad y = 5 \quad x = -2$$

20. Írjuk fel az $A(-4, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 12)$ háromszög súlyvonalainak egyenletét.

21. Írjuk fel az $A(-4, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 12)$ háromszög magasságvonalainak egyenletét.

22. Határozzuk meg az egyenes iránytangensét és irányszögét.

$$x - y = 0 \quad x + y = 0 \quad 2x - 3y = 6 \quad 5x + 4y = 8 \quad x = 3 \quad y = -6$$

23. Adjuk meg az egyenesek normálvektorát.

$$y = x - 3 \quad y = \frac{2}{3}x - 5 \quad y = 5 \quad x = -6 \quad -2x + 9y = -11 \quad 7y - x = 1$$

24. Adjuk meg az egyenes irányvektorát és normálvektorát, ha az egyenes irányszöge
 $30^\circ \quad -30^\circ \quad 80^\circ \quad -20^\circ \quad 90^\circ$

25. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0, 0)$ $B(8, 0)$ $C(2, 6)$.

a) Írjuk fel a magasságvonalak egyenletét!

b) Bizonyítsuk be, hogy a három magasságvonal egy ponton halad át!

26. Írjuk fel a) az $A(0, 0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(2, 3)$ normálvektorú, b) a $B(-2, 1)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(3, \sqrt{3})$ normálvektorú, c) a $C(3, -2)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(1, 1)$ normálvektorú, d) a $D(3, 5)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-1, 1)$ normálvektorú egyenes egyenletét.

27. Határozzuk meg m értékét úgy, hogy az $mx - y = 3$ egyenes áthaladjon az

a) $A(1, 4)$ ponton, b) $B(-2, 2)$ ponton

28. Írjuk fel a) a $A(2, 4)$ ponton áthaladó, b) a $B(-1, 3)$ ponton áthaladó, és a koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos egyenesek egyenletét.

29. a) Adjuk meg az alábbi pontpárokon áthaladó egyenesek egyik irányvektorát.

$$A(7, 8) \quad B(0, 0) \quad A(2, 3) \quad B(9, 5) \quad A(2, 1) \quad B(-1, 4) \quad A(3, -4) \quad B(1, 2)$$

b) Írjuk fel az A és B pontokon áthaladó egyenes egyenletét.

$$A(9, 6) \quad B(4, 3) \quad A(4, 6) \quad B(-3, -1) \quad A(-2, -3) \quad B(4, -1) \quad A(4, 5) \quad B(0, 0)$$

30. Határozzuk meg annak a pontnak a koordinátáit, amely az $A(-4, -3)$ $B(-1, 4)$ pontokon áthaladó egyenesre illeszkedik és abszcisszája 2.

31. Írjuk fel a háromszög súlyvonalainak és középvonalainak egyenletét. $A(3, 7)$, $B(1, 1)$, $C(8, -4)$

32. Vizsgáljuk meg, hogy egy egyenesre illeszkedik-e a következő három pont:

$$A(-2, -8) \quad B(1, -7) \quad C(10, -4) \quad A(3, 8) \quad B(5, 4) \quad C(6, 2) \\ A(3, -5) \quad B(-2, 4) \quad C(8, -14)$$

33. Határozzuk meg az alábbi egyenesek egyik irányvektorát és egyik normálvektorát:

$$y - x = 0 \quad x - y = -3 \quad 2x - y = 4 \quad 3x - y = 1 \quad 2x + y = -1 \quad \frac{2}{3}x + y = 2$$

34. Számítsuk ki a két-két egyenes metszéspontját!

a) $y = x + 3$, $y = -x + 8$ b) $x + 2y = 12$, $5x - 3y = -5$ c) $3x + y + 7 = 0$, $x - 4y - 2 = 0$

35. Számítsuk ki a háromszög csúcsainak koordinátáit, ha ismerjük az oldalegyenesek egyenleteit.

$$4x - 5y = -13 \quad 7x + 2y = 31 \quad 3x + 7y = 1$$

36. Valamely háromszög csúcsai: $A(-3, 4)$ $B(1, 8)$ $C(5, 2)$ Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

37. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad

a) a $3x - y + 2 = 0$ és az $x + 2y - 3 = 0$ egyenesek metszéspontján és az $A(1, 2)$ ponton,

b) $2x + 3y + 1 = 0$ és az $6x - 5y - 3 = 0$ egyenesek metszéspontján és az $B(-2, -2)$ ponton.

38. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely

a) áthalad az $x - 3y - 6 = 0$ és az $4x + y = 0$ egyenesek metszéspontján és irányvektora $\mathbf{v}(1, -3)$,

b) áthalad a $2x + 3y + 1 = 0$ és a $6x - 5y - 3 = 0$ egyenesek metszéspontján és irányvektora $\mathbf{v}(1, 2)$.

39. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $3x + 4y = 23$ és a $6x - 7y = 16$ egyenesek metszéspontján, és az y tengelyből 3 egységet vág le.

40. Hogyan kell az m értékét megválasztani úgy, hogy az $y = mx + 4$ egyenes áthaladjon a

$$2x - y + 1 = 0 \quad \text{és a} \quad y = x + 5 \quad \text{egyenesek metszéspontján?}$$

41. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek a $3x - 5y = 6$ és a

$$4x + y + 6 = 0 \quad \text{egyenesek közötti szakaszát az origó felezi.}$$

42. Határozzuk meg az egyenes iránytangensét, ha az egyenlete:

$$\begin{array}{llllll} 2x - y = 0 & x - y = 0 & 2x - 3y = 0 & x + 2y = 0 & 3x + 4y = 0 & 2x + 3y + 1 = 0 \\ 2x + 3y = 12 & & 2x + 3y + 1 = 0 & & x + y = 2 & \end{array}$$

43. Állapítsuk meg ábrázolás nélkül, hogy a következő egyenespárok közül melyek párhuzamosak egymással, és melyek merőlegesek egymásra:

$$\begin{array}{llll} x + 2y = 6 & x + 2y = 4 & 2x + 3y = 5 & y = \frac{3}{2}x - 6 \\ 2x - y = 4 & 2x - y = -1 & 4x - 5y = 12 & 8x - 10y = 7 \\ x + 2y = 6 & -2x + y = -1 & 5x - 6y = 30 & 12x + 10y = 8 \end{array}$$

44. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy a két egyenes párhuzamos legyen!

a) $y = \frac{p}{2}x + 1$ $y = 4x - 8$, b) $2x - 5y = 3$ $3px + y = 1$, c) $3x - 4y = 5$ $2x + 3py = 0$

45. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy az $y = x + 2$ egyenes merőleges legyen az

$$y = px + 1 \quad \text{egyenesre.}$$

46. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az origón, és merőleges az

$$y = \frac{5}{7}x - 5 \text{ egyenesre.}$$

47. Ez $2+2=4$ feladat. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a) az $A(1, 5)$ ponton, párhuzamos, illetve merőleges a $B(4, -2)$ és a $C(5, 3)$ pontokon áthaladó egyenesre, b) az $A(3, -4)$ ponton, párhuzamos, illetve merőleges a $B(6, 4)$ és a $C(-2, -3)$ pontokon áthaladó egyenesre.

48. Határozzuk meg az e és az f egyenes metszéspontját és hajlásszögét, ha

a) az e egyenes párhuzamos az $x - 3y + 5 = 0$ egyenessel, és áthalad a $P(-1, 0)$ ponton, az f egyenes áthalad a $Q(3, 7)$ ponton és merőleges az $x - y - 1 = 0$ egyenesre,

b) az e egyenes áthalad az origón és az $x + y - 2 = 0$, $3x - y + 7 = 0$ egyenesek metszéspontján, az f egyenes áthalad az $R(3, -5)$ ponton és merőleges a $2x - 3y - 8 = 0$ egyenesre.

49. Határozzuk meg annak a szakasznak a középpontját, amelynek az egyik végpontja a $A(-4, 3)$ pont, a másik pedig ezen a ponton áthaladó és az $5x - 3y = 7$ egyenessel párhuzamos egyenesnek az y tengelyre illeszkedő pontja.

50. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely a) az $A(-5, -2)$ és a $B(-3, 4)$ b) az $A(4, 1)$ és a $B(5, -3)$ pontokat összekötő szakaszt merőlegesen felezi.

51. Igazoljuk, hogy a $A(7, -14)$ pont a $B(-3, 1)$ és a $C(13, 3)$ pontokat összekötő szakasz felező merőlegesére illeszkedik.

52. Határozzuk meg az $x + 2y = 12$ egyenesnek azt a pontját, amely az $A(4, 4)$ és a $B(6, -4)$ pontoktól egyenlő távolságra van.

53. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $3x - 4y = 12$ egyenesnek a tengelyek közé eső szakaszának a felezőpontján, és merőleges az adott egyenesre.

54. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai $A(2, 1)$, $B(5, 3)$, $C(3, -4)$. Határozzuk meg a háromszög oldalainak az egyenletét és a csúcsainak a koordinátáit.

55. Írjuk fel az $A(7, 11)$ ponton áthaladó olyan egyenes egyenletét, amely a $B(3, 4)$ és a $C(9, 5)$ pontoktól egyenlő távolságra van.

56. Egy derékszögű háromszög átfogó egyenesének egyenlete $y = 3x - 5$. Egyik befogó egyenesének egyenlete $x + y - 5 = 0$, és az ezzel szemközti csúcs abszcisszája 4. Határozzuk meg az átfogóhoz tartozó magasságvonal egyenletét.

57. Számítsuk ki a háromszög csúcsainak a koordinátáit, ha az egyik oldalegyenesének egyenlete $5x - 3y + 2 = 0$ a másik két oldalához tartozó magasságvonal egyenlete

$$4x - 3y + 1 = 0 \text{ és } 7x + 2y - 22 = 0$$

58. Egy háromszög két csúcsa: $A(-6, 2)$ $B(2, -2)$, magasságpontja $M(1, 2)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit.

59. Írjuk fel a háromszög oldalegyeneseinek egyenletét, ha az egyik csúcsa $A(3, -4)$ és két magasságvonala az egyenlete $7x - 2y - 1 = 0$ és $2x - 7y - 6 = 0$.
60. Egy háromszög csúcsai: $A(-3, 2)$ $B(-1, 6)$ $C(4, 2)$. Igazoljuk, hogy az oldalfélező merőlegek egy pontban metszik egymást.
61. Egy háromszög csúcsai: $A(0, 0)$ $B(8, 0)$ $C(2, 6)$. Igazoljuk, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Számítsuk ki a magasságpont koordinátáit.
62. Határozzuk meg az $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(1, 4)$ csúcsokkal adott háromszög a) súlypontjának, b) magasságpontjának, c) a körülírt kör középpontjának a koordinátáit.
63. Egy háromszög csúcsai $A(1, -2)$, $B(-3, 4)$, $C(2, -5)$. Számítsuk ki az A csúcshoz tartozó magasságvonalt és az AC oldalhoz tartozó súlyvonal metszéspontjának a koordinátáit.
64. Valamely paralelogramma két szomszédos oldalegyenesének egyenlete: $3x + y + 10 = 0$ és $x - y - 2 = 0$. A két oldal metszéspontjával szemközti átló egyenesének egyenlete $x - 5y - 2 = 0$. Számítsuk ki a csúcsok koordinátáit.
65. Határozzuk meg az x tengelyen azokat a pontokat, amelyek az $(5, 12)$ ponttól 13 egység távolságra vannak.
66. Határozzuk meg a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit, ha csúcsai:
 $A(1, 5)$ $B(0, 6)$ $C(-6, -2)$
67. Írjuk fel a) a $A(5, 2)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(4, 3)$ normálvektorú, b) a $B(-3, 4)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(2, 1)$ normálvektorú, c) a $C(-5, -6)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-2, 3)$ normálvektorú, d) a $D(0, 0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n}(-1, -5)$ normálvektorú egyenes egyenletét.
68. Számítsuk ki a $(-3, -2)$ és az $(5, 8)$ pontokon áthaladó egyenes és a $6x + 5y = 30$ egyenes hajlásszögét.
69. Számítsuk a háromszög szögeit, ha oldalegyeneseinek egyenlete
a) $y = 2x - 1$, $y = x + 3$ $y = -x + 5$ b) $x - 5y + 9 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$, $2x + y + 1 = 0$.
70. Számítsuk ki a négyszög átlónak hajlásszögét, ha egymás után következő csúcsai
 $A(-1, 2)$, $B(6, 1)$, $C(5, 6)$, $D(1, 5)$.
71. Milyen messze van az origó az $y = \frac{1}{2}x + 3$ egyenestől?
72. Milyen messze van a) az $(1, 2)$ pont az $y = -2x + 2$ egyenestől, b) a $(-3, 9)$ pont az $x - y = 2$ egyenestől, d) a $(4, -19)$ pont az $3x + 17y - 1 = 0$ egyenestől.
73. Egy háromszög csúcsai $A(-5, 0)$, $B(4, 2)$, $C(-1, 8)$. Számítsuk ki a súlypontnak a B csúcson áthaladó magasságvonalra mért távolságát.
74. Mekkora a háromszög magasságai, ha a csúcsai $A(-4, 6)$ $B(-2, -3)$ $C(4, 5)$?

75. Számítsuk ki a következő két egyenes távolságát.

a) $3x - y = 6$, $3x - y = 8$ b) $x + 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$

76. Számítsuk ki az x tengely azon pontjainak koordinátáit, amelyek az $y = \frac{4}{3}x + 4$ egyenestől 10 egység távolságra vannak.

77. Tükrözzük a $P(-5, 13)$ pontot a $2x - 3y - 3 = 0$ egyenesre. Számítsuk ki a tükrökép koordinátáit.

78. Egy háromszög két csúcsa $A(-6, 0)$, $B(6, 0)$, a harmadik csúcsa pedig az $y = -3x + 5$ egyenesen mozog. Mi a súlypontjainak a mértani helye?

79. Egy háromszög két csúcsa $A(-4, 6)$, $B(6, 2)$, a harmadik csúcsa pedig az $y = 3x + 5$ egyenesen mozog. Mi a súlypontjainak a mértani helye?

80. Egy egyenlő szárú háromszög szárának végpontjai $A(4, 2)$, $B(1, 8)$. Mi a harmadik csúcs mértani helye?

81. Egy háromszög egyik csúcsa $A(-3, -1)$. A C csúcsból induló magasságvonal egyenlete $2x + y = 3$, és az ugyaninnen kiinduló súlyvonal egyenlete $x - y = 1$. Számítsuk ki a két hiányzó csúcspont koordinátáit.

82. Az a és b mely értékeire lesz a $2x - ay - 1 = 0$ és a $4x - y + b = 0$ egyenletű egyenes
a) egymással párhuzamos, b) egymásra merőleges, c) azonos?

83. Egy háromszög két csúcspontjának koordinátái $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$. A harmadik csúcs végigfut a $2x - 5y + 25 = 0$ egyenletű egyenesen. Milyen alakzatot alkotnak a háromszögek súlypontjai?

84. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak egyenlete $3x - 2y = 20$ és $3x + 2y = 10$. Határozzuk meg az alap egyenesének az egyenletét, ha tudjuk, hogy az alap felezőpontja az $\left(5, \frac{3}{2}\right)$ pont.

85. Egy háromszög A csúcsából induló magasságvonalának egyenlete $y = x + 2$. Az ugyanezen csúcsból induló súlyvonal egyenlete $3x - y = 4$. A B csúcs koordinátái $(-2, 2)$. Írjuk fel a B csúccsal szemközti oldal egyenletét.

86. Egy háromszög két csúcspontjának koordinátái $A(4, 6)$, $B(3, -1)$. A harmadik csúcspontból induló szögfelező egyenesének egyenlete $y = \frac{1}{2}x$. Számítsuk ki a harmadik csúcspont koordinátáit.

87. Egy háromszög A csúcsból induló súlyvonalának egyenlete $x + 14y = -20$, a C csúcsból induló súlyvonal egyenlete $5x - 8y = 4$, az AC oldal egyenlete $3x - 10y = -8$. Határozzuk meg a harmadik súlyvonal egyenletét.

88. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(-1, 1)$, $B(7, 1)$, $C(0, 8)$. Milyen arányban metszi az A csúcsból induló magasságot a C csúcsból induló súlyvonal?

89. A $P(x, y)$ pont úgy mozog a koordináta-rendszer síkjában, hogy az $x = 5$ egyenletű egyenestől kétszer olyan távol van, mint az $y = 8$ egyenestől. Milyen pályán mozog a P pont?

90. Határozzuk meg a P paraméter értékét úgy, hogy

- a) a $3x - 4y = 5$ egyenletű egyenes párhuzamos legyen a $px + y = 2$ egyenletű egyenessel,
- b) az $y = \frac{p}{3}x - 4$ egyenletű egyenes párhuzamos legyen a $y = \frac{12}{p}x + 1$ egyenletű egyenessel,
- c) a $2x - 5y = -3$ egyenletű egyenes merőleges legyen a $3px + y = 2$ egyenletű egyenesre,
- d) az $y = \frac{2}{3}(x - 3)$ egyenletű egyenes merőleges legyen a $y = -px + 5$ egyenletű egyenesre.

91. Írjuk fel az AB szakaszfelező merőlegesének egyenletét. $A(-4, -5), B(6, 9)$

92. Egy téglalap két szomszédos csúcsa $A(-1, -2), B(5, -5)$. Az egyik átló egyenesének egyenlete $7x + 4y = 15$. Számítsuk ki a hiányzó csúcsok koordinátáit.

93. Egy háromszög magasságpontja $M(1, 2)$, két csúcsa $A(-6, 2), B(2, -2)$. Számítsuk ki a C csúcs koordinátáit és a háromszög területét.

94. Határozzuk meg azoknak a pontoknak a halmazát a síkban, amelyeknek egy AB szakasz végpontjaitól mért távolságai négyzetének különbsége 25, ha a szakasz végpontjainak koordinátái $A(1, 2), B(8, 10)$.

95. Az e egyenes egyenlete $2y = -5x + 7$. Az f egyenes átmegy a $P(4, -5)$ ponton és az x tengelyből 5 egységet vág le. Számítsuk ki az e és f egyenesek hajlásszögét.

96. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a $P(10, 12)$ ponton, és a $4x + 3y = 30$ és a $4x + 3y = 3$ egyenletű egyenesek közé eső szakaszának az y tengelyre eső merőleges vetülete 3 egység. Hány megoldás van?

97. Adott a koordinátarendszerben az $e: x - 2y = 0$ egyenes és az $A(14; 2)$ pont. Tudjuk, hogy $AC = BC$, ahol C illeszkedik az e egyenes első negyedbe eső részére, B illeszkedik az x tengelyre, és CB párhuzamos az y tengellyel. Adjuk meg a C és B pontok koordinátáit.

98. A $K(4; 2)$ középpontú, 40 sugarú kör és az x tengely két metszéspontja legyen A és B . Az ABC háromszögben $AC = BC$, továbbá az ABC háromszög beírt körének középpontja K . Adjuk meg a C pont koordinátáit.

99. Az $x^2 - (4k - 2)x + y^2 - (2k + 4)y + c = 0$ köregyenletben határozzuk meg a k és a c paraméter értékét úgy, hogy a kör érintse mindkét koordinátatengelyt.

100. Az ABC egyenlő szárú háromszög két szárának egyenlete:

$7x - 4y = -24$ $x - 8y = 4$, a harmadik oldalára illeszkedik a $P(10; 4)$ pont.

a) Adjuk meg a szárak C metszéspontját. b) Írjuk fel a C csúcsra illeszkedő belső szögfelező egyenletét. c) Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét.

101. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az $A(-7; 5)$ pont, továbbá az $(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 17$ egyenletű kört az $E(-2; 2)$ pontban érinti.

102. Tekintsük a $K(5;2)$ középpontú, $r=3$ egység sugarú k kört. Az origóból az e_1 és az e_2 érintők húzhatók a k körhöz.

a) Írjuk fel e_1 és e_2 egyenletét.

b) Mekkora szöget zár be egymással e_1 és e_2 ?

c) Mekkora területű az a síkidom, amelynek pontjaiból a k kör 60° -nál nem kisebb, 90° -nál pedig nem nagyobb szögben látható?

103. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $P(2, 5)$ ponton, továbbá a koordinátarendszer tengelyeinek pozitív felével a lehető legkisebb területű háromszöget fogja közre.

104. Egy háromszög csúcsai $A(-2, -3), B(8, 1), C(4, 6)$. a) Számítsuk ki a háromszög magasságpontjának koordinátáit. b) Számítsuk ki a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátáit. c) Írjuk fel ezen két pontot összekötő egyenes, az úgynevezett Euler-egyenes egyenletét.

105. Az ABC háromszög csúcspontjai $A(-1, -2), B(7, 2), C(0, 5)$.

a) Bizonyítsuk be hogy a $P(8, 1)$ pont illeszkedik a megadott ABC háromszög köré írható körre.

b) Jelölje E, F, G a P pontnak az AB, BC, CA egyenesre vonatkozó merőleges vetületét. Számítsuk ki az E, F, G pontok koordinátáit.

c) Bizonyítsuk be, hogy az E, F, G pontok egy egyenesre illeszkednek. A kapott egyenest a ponthoz tartozó Simson-egyenesnek nevezzük.

VII. Függvények határértéke és folytonossága

Összetett és inverz függvények

1. Ábrázoljuk a függvényt és hajtsunk végre függvényvizsgálatot!

$$f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = -|x-2| + 1$$

$$f: [-2\pi; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |\sin x|$$

$$f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x-2| + |x+2|$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2^{-|x|}$$

$$f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 2$$

2. Ábrázoljuk a függvényt és hajtsunk végre függvényvizsgálatot!

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} \quad h(x) = \sqrt{|x|} \quad i(x) = \sqrt{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x$$

3. Írjuk fel az $f(g(x))$ összetett függvény hozzárendelési szabályát. Minden szereplő függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = 3x - 4 \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = 3x - 4 \quad f(x) = x - 1, \quad g(x) = 3x - 4$$

4. Adjuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényt. $D_f = [1, \infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 5, \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$D_f = R, \quad f(x) = 2 - 3x, \quad D_g = R - \{0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

5. Ábrázoljuk: $f(x) = |\sin|x|| \quad g(x) = |tg|x||$

6. Állapítsuk meg a külső és a belső függvényt a következő összetett függvények esetében.

$$f(x) = (x+3)^2 \quad g(x) = [\operatorname{sgn} x] \quad h(x) = |x^2| \quad i(x) = \sqrt{x-2} \quad j(x) = 2^{x+9}$$

7. Ábrázoljuk ezeket az összetett függvényeket: $f(x) = \log_3|x| \quad g(x) = |\log_3 x| \quad h(x) = \operatorname{sgn}[x]$

8. Ábrázoljuk a függvényt és hajtsunk végre függvényvizsgálatot!

$$j(x) = \lg|x| \quad k(x) = 2 \cos(x + \pi) \quad l(x) = \lg \sin x \quad m(x) = 2^{-|x|}$$

9. Adjuk meg a következő függvények inverz függvényét, ha van.

$$f(x) = x + 5 \quad g(x) = x^2 + 1 \quad h(x) = 3x - 1 \quad i(x) = \sqrt{x} \quad j(x) = 4^x \quad k(x) = \log_3 x$$

10. Ábrázoljuk ezeket a függvényeket az inverzükkel együtt egy koordináta-rendszerben.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad g(x) = 2^x \quad h(x) = \frac{2}{3}x \quad i(x) = \sqrt{x} + 4 \quad j(x) = \frac{1}{x} \quad k(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

11. Ábrázoljuk ezeket a függvényeket az inverzükkel együtt egy koordináta-rendszerben.

$$f(x) = -\frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{x+3}{x-1} \quad h(x) = \frac{x}{x-1} \quad i(x) = \sqrt[3]{x+4} \quad j(x) = \frac{1}{x-7}$$

Definíciók

I. Véges helyen vett véges határérték

Az f függvény határértéke a b helyen c , ha

a) f értelmezve van b egy lyukas környezetében

b) minden $\varepsilon > 0$ -hoz megadható egy olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy ha $b - \delta < x < b + \delta$, de $x \neq b$, akkor $c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon$.

Megjegyzések

1. Ennek a szemléletes jelentése az, hogy a $b - \delta$ és $b + \delta$ között felvett függvényértékek a c körüli ε sugarú sávba esnek.

2. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, másképpen $f(x) \rightarrow c$, ha $x \rightarrow b$

3. A definíció b) pontja másképpen:

minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy ha $0 < |x - b| < \delta$, akkor $|f(x) - c| < \varepsilon$.

II. Végtelenben vett véges határérték

Az f függvény határértéke a végtelenben A , ha

- a) létezik egy olyan $p > 0$ szám, amelynél nagyobb minden x -re $f(x)$ értelmezve van
- b) minden $\varepsilon > 0$ -hoz megadható egy olyan K szám, amelyre teljesül, hogy ha $x > K$, akkor $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Megjegyzések

1. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, másképpen $f(x) \rightarrow A$, ha $x \rightarrow \infty$

2. A definíció b) pontja másképpen:

minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $K > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy ha $x > K$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$

III. Végtelenben vett végtelen határérték

Az f függvény határértéke a végtelenben végtelen, ha

- a) létezik egy olyan $p > 0$ szám, amelynél nagyobb minden x -re $f(x)$ értelmezve van
- b) minden $R > 0$ -hoz megadható egy olyan K szám, amelyre teljesül, hogy ha $x > K$, akkor $f(x) > R$

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, másképpen $f(x) \rightarrow \infty$, ha $x \rightarrow \infty$

IV. Véges helyen vett végtelen határérték

Az f függvény határértéke a b helyen végtelen, ha

- a) f értelmezve van b egy lyukas környezetében
- b) minden R -hoz megadható egy olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy ha $b - \delta < x < b + \delta$, de $x \neq b$, akkor $f(x) > R$.

Megjegyzések

1. Jelölés: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$, másképpen $f(x) \rightarrow \infty$, ha $x \rightarrow b$

2. A definíció b) pontja másképpen:

minden R -hoz van olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy ha $0 < |x - b| < \delta$, akkor $f(x) > R$

V. Folytonosság

Az f függvény folytonos a b helyen, ha

- a) értelmezve van b egy (nem lyukas!) környezetében
- b) létezik b -ben határértéke
- c) a függvény b -ben vett határértéke megegyezik a b -ben vett helyettesítési értékével, azaz $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$

Megjegyzés

A definíció másképpen:

Az f függvény folytonos a b helyen, ha

- a) értelmezve van b egy (nem lyukas!) környezetében

b) minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy ha $|x - b| < \delta$, akkor $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$.

Feladatok

12. Számítsd ki és bizonyítsd a definíció alapján:

a) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x-5}{x-2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-5}{x-2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{x-2}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{x-2}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

14. Számítsd ki és bizonyítsd a definíció alapján:

a) $\lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{-3x-11}{x+4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{-3x-11}{x+4}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x-11}{x+4}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x-11}{x+4}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x^2 - 4}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2 - 4}$ g) $\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x^2 - 4}$ h) $\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x^2 - 4}$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - 4}$

15. Mennyi? b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^3 - 6x^2}{x^4 - 6x^3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 6x^2}{x^4 - 6x^3}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

17. Sejtsük meg a határértéket, majd keressünk a definícióban szereplő ε -hoz megfelelő δ -t.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (7x + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{4}x - 5 \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 4)$ e) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1}$
 f) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x$ g) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \cdot \frac{x-3}{x-3}$ h) $\lim_{x \rightarrow 5} \lg x \cdot \frac{x-5}{x-5}$

18. Lássuk be a definíció alapján, hogy

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} 4^x = 16$

19. Lássuk be a definíció alapján a következő határértékeket: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-2} + 4 = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lg x} + 4 \right) = \infty$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3) = \infty$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + 2 \right) = 2$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4^{x-3} = \infty$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-2}{3x} = \frac{5}{3}$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x}} = 0$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-4}{x} = 5$

20. Lássuk be a definíció alapján a következő határértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x + 6) = \infty$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \lg(x-4) = \infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x + 6) = \infty$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 10) = \infty$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 4x) = \infty$ h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-2} + 4 = \infty$

21. Sejtsük meg a következő határértéket, majd határozzuk meg a definícióban szereplő bal és jobb

oldali megfelelő δ -t: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-1}$

22. Sejtsük meg a határértéket, majd bizonyítsuk be a definíció alapján: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-1}{4x+3}$ $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_{0,5} x \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \left(\frac{5}{x-3} + 1 \right) \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \left(\frac{1}{x+2} + 4 \right)$$

23. Számítsuk ki a határértéktételek segítségével:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x+5x^2}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+x}{x+2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2+2x^4}{5x^3-x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{5x^2+2x}$$

24. Lássuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

25. Hol folytonos jobbról és hol folytonos balról az $f(x) = [x]$ és az $f(x) = \{x\}$ függvény?

26. Számítsuk ki: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-6x+4}{(x-1)(x^2-3)}$

27. Határozzuk meg határértéket, majd bizonyítsuk azt be a definíció alapján:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x-3}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x+3}{2x}$$

28. Határozzuk meg: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4}{5x}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow -3} (x+3)(x-3)^2$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+9x^2+27x+27}{x+3}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+7}{x+3} \quad \lim_{x \rightarrow -3} [2x] \quad \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x}{2} \right] \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-8x+12}{x^2-6x+8} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$$

29. Határozd meg és bizonyítsd be az eredményt: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$

30. Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = -x+8$ függvény mindenütt folytonos.

31. Határozzuk meg a következő függvények határértékét a végtelenben:

$$f(x) = \frac{5x+7}{x-7x^2} \quad f(x) = \frac{3x^2-5x+7}{4x-5x^2}$$

32. Határozzuk meg a következő függvények határértékét a mínusz végtelenben:

$$f(x) = \frac{2x^2-15x+13}{3x^2-x} \quad f(x) = \frac{2x^2+2x+7}{4x^2-x+9}$$

33. Határozzuk meg a következő függvények határértékét az $x=0$ helyen:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x+6} \quad f(x) = \frac{x^2-2x}{x} \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

34. Határozzuk meg a következő határértékeket:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2x}{x^3-x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{9-x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-8x+12}{x^2-6x+8}$$

35. Határozzuk meg a következő bal- és jobboldali határértékeket:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} [x] \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} [x] \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x+1}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x+1}{5x} \quad \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6} \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6} \quad \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x^2-9}{x^2+6x+9} \quad \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$$

36. Folytonosak-e ezek a függvények az $x=2$ helyen?

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-2}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

37. Válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{ha } x < 5 \\ x+p, & \text{ha } x \geq 5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{ha } x < 5 \\ px+10, & \text{ha } x \geq 5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x-2, & \text{ha } x < 5 \\ px+p, & \text{ha } x \geq 5 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2}, & \text{ha } x \neq -2 \\ p, & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2}, & \text{ha } x < -2 \\ p-x, & \text{ha } x \geq -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2}, & \text{ha } x > -2 \\ -x+p, & \text{ha } x \leq -2 \end{cases}$$

38. Mennyi az f és a g függvény határértéke a 3 helyen?

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 - 15$$

$$D_g =]1, \infty[, \quad g(x) = \frac{x^3-9x}{x^2+3x}$$

39. Van-e a következő függvényeknek határértéke a 3 helyen? Ha van, határozzuk meg!

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}, \quad f(x) = \frac{2x+6}{x^2-9}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 3\}, \quad f(x) = \frac{x^2-9}{2x+6}$$

40. Van-e a következő függvénynek határértéke a -3 helyen? Ha van, határozzuk meg!

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}, \quad f(x) = \sin \frac{x^2+6x+9}{x+3}$$

41. Számítsuk ki a függvény határértékét a 3 és a -3 helyen! $D_f = \mathbb{R} - \{0; 3\}, \quad f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-3x}$

42. Hol folytonosak ezek a függvények? $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x^2 - x + 3$

$$f: (\mathbb{R} - \{5\}) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{2x+6}{x-5}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{x-5}, & \text{ha } x \neq 5 \\ 10, & \text{ha } x = 5 \end{cases}$$

43. Válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 3 \\ x+p, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \text{ha } x \geq 3 \\ p-x, & \text{ha } x < 3 \end{cases}$$

44. Melyik függvény hol folytonos, melyik hol nem? $f(x) = \frac{9-x^2}{3-x}, \quad \text{ha } x \neq 3, \quad f(3) = 0$

$$g(x) = \frac{9-x^2}{3+x}, \quad \text{ha } x \neq -3, \quad g(-3) = 6$$

$$h(x) = \frac{3-x}{9-x^2}, \quad \text{ha } x \neq \pm 3, \quad h(\pm 3) = \frac{1}{6}$$

45. a) Számítsuk ki a) az f és g függvény bal- és jobboldali határértékét $x = 4$ -ben

$$D_f = [1, 10], \quad f(x) = [x] \quad D_g = [1, 10], \quad g(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$$

b) Számítsuk ki a h és i függvény bal- és jobboldali határértékét $x = \frac{\pi}{2}$ -ben.

$$D_h = \mathbb{R}, \quad h(x) = [\sin x] \quad D_i =]0, \pi[, \quad i(x) = \left[\frac{1}{\sin x} \right]$$

46. Hol van véges és hol van végtelen határértéke ezeknek a függvényeknek?

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad f(x) = \log_3 |x| \quad D_g = \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \log_3 x, & \text{ha } x > 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ \log_3(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$D_h = \mathbb{R}, \quad h(x) = 3^{|x|} \quad D_i = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, \quad i(x) = \frac{8-2x}{4x^2 - x^3}$$

47. Melyik függvénynek van a végtelenben véges határértéke? $d(x) = \sqrt{x}$ $e(x) = |x|$

$$f(x) = [x] \quad g(x) = \frac{1}{[x]} \quad i(x) = x - [x] \quad j(x) = \frac{1}{x - [x]} \quad k(x) = \cos x \quad l(x) = \operatorname{tg} x$$

48. Határozzuk meg: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x}{3x^2 - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x + 3}{2x^3 + x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 6x + 3}{2x^3 + x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x + 3}{2x^3 + x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2-x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{x^3-1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-7x}{5x^3-7x^2}$$

49. Határozzuk meg a függvények határértékét az értelmezési tartományokon kívüli pontban.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3 + x}{x^3 + x^2 - 2x} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$$

50. Vizsgáljuk meg a függvények jobb és bal oldali határértékét a kérdéses helyen.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x \quad \lim_{x \rightarrow 1} \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \begin{cases} \lg x, & \text{ha } x > 0 \\ x^2, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$$

Végeredmények

12. a) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x-5}{x-2} = \infty$, mert minden $R > 0$ számhoz megadható egy $\delta > 0$ úgy, hogy ha

$$2 - \delta < x < 2, \text{ akkor } f(x) > R. \quad \delta = \frac{3}{R-1} \quad (R > 1)$$

12. b) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-5}{x-2} = -\infty$, mert minden $R < 0$ számhoz megadható egy $\delta > 0$ úgy, hogy ha

$$2 < x < 2 + \delta, \text{ akkor } f(x) < R. \quad \delta = \frac{3}{1-R}$$

12. c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{x-2} = 1$, mert minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy $K > 0$ szám úgy, hogy ha $x > K$,

$$\text{akkor } 1 - \varepsilon < f(x) < 1.$$

$$K = \frac{3 + 2\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$12. d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-5}{x-2} = 1, \text{ mert minden } \varepsilon > 0 \text{ számhoz megadható egy } R < 0 \text{ szám úgy, hogy ha } x < R,$$

$$\text{akkor } 1 < f(x) < 1 + \varepsilon.$$

$$R = \frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon}$$

$$12. e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 5) = 3, \text{ mert az } f(x) = x + 5 \text{ függvény a 2-ben folytonos.}$$

$$14. a) \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{-3x-11}{x+4} = \infty, \text{ mert minden } R > 0 \text{ számhoz megadható egy } \delta > 0 \text{ úgy, hogy ha}$$

$$-4 < x < -4 + \delta, \text{ akkor } f(x) > R. \quad \delta = \frac{1}{R+3}$$

$$14. b) \lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{-3x-11}{x+4} = -\infty, \text{ mert minden } R < 0 \text{ számhoz megadható egy } \delta > 0 \text{ úgy, hogy ha}$$

$$-4 - \delta < x < -4, \text{ akkor } f(x) < R. \quad \delta = \frac{-1}{R+3} \quad (R < -3)$$

$$14. c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x-11}{x+4} = -3, \text{ mert minden } \varepsilon > 0 \text{ számhoz megadható egy } K > 0 \text{ szám úgy, hogy ha}$$

$$x > K, \text{ akkor } -3 < f(x) < -3 + \varepsilon. \quad K = \frac{1-4\varepsilon}{\varepsilon} \quad \left(\varepsilon < \frac{1}{4} \right)$$

$$14. d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x-11}{x+4} = -3, \text{ mert minden } \varepsilon > 0 \text{ számhoz megadható egy } K < 0 \text{ szám úgy, hogy ha}$$

$$x < K, \text{ akkor } -3 - \varepsilon < f(x) < -3. \quad K = \frac{-4\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

$$14. e) \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = \infty, \text{ mert minden } R > 0 \text{ számhoz megadható egy } \delta > 0 \text{ úgy, hogy ha}$$

$$2 < x < 2 + \delta, \text{ akkor } f(x) > R. \quad \delta = \sqrt{\frac{1+4R}{R}} - 2$$

$$14. f) \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty, \text{ mert minden } R < 0 \text{ számhoz megadható egy } \delta > 0 \text{ úgy, hogy ha}$$

$$2 - \delta < x < 2, \text{ akkor } f(x) < R. \quad \delta = 2 - \sqrt{\frac{1+4R}{R}} \quad \left(R < -\frac{1}{4} \right)$$

$$14. g) \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty, \text{ mert minden } R < 0 \text{ számhoz megadható egy } \delta > 0 \text{ úgy, hogy ha}$$

$$-2 < x < -2 + \delta, \text{ akkor } f(x) < R. \quad \delta = 2 - \sqrt{\frac{1+4R}{R}} \quad \left(R < -\frac{1}{4} \right)$$

$$14. h) \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = \infty, \text{ mert minden } R > 0 \text{ számhoz megadható egy } \delta > 0 \text{ úgy, hogy ha}$$

$$-2 - \delta < x < -2, \text{ akkor } f(x) > R. \quad \delta = \sqrt{\frac{1+4R}{R}} - 2$$

$$14. i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0, \text{ mert minden } \varepsilon > 0 \text{ számhoz megadható egy } K > 0 \text{ szám úgy, hogy ha } x > K,$$

akkor $0 < f(x) < 0 + \varepsilon$.

$$K = \sqrt{\frac{1+4\varepsilon}{\varepsilon}}$$

14. j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\frac{1}{4}$, mert minden $\varepsilon > 0$ számhoz megadható egy $\delta > 0$ szám úgy, hogy ha

$$0 - \delta < x < 0 + \delta, \text{ akkor } -\frac{1}{4} - \varepsilon < f(x) < -\frac{1}{4} + \varepsilon. \quad \delta = \sqrt{\frac{16\varepsilon}{4\varepsilon + 4}}$$

15. b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x + 1) = -2$, mert az $f(x) = x + 1$ függvény a -3 -ban folytonos.

15. c) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^3 - 6x^2}{x^4 - 6x^3} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \infty$

15. d) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 6x^2}{x^4 - 6x^3} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$, mert az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a 6 -ban folytonos.

15. e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x + 5} = -\frac{1}{7}$, mert az $f(x) = \frac{x - 3}{x + 5}$ függvény a 2 -ben folytonos.

VIII. A kör és a parabola koordinátageometriája

A kör egyenlete

1. Melyik egyenlet kör egyenlete?

$$x^2 + 2y^2 - 8x - 1 = 0$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$$

2. Igazoljuk, hogy a következő egyenletek körök egyenletei!

$$x^2 + y^2 - 12x + 20y + 15 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y + 2 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - x = 0$$

3. Igazoljuk, hogy az $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ és az $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$ egyenletek körök egyenletei! Számítsuk ki a középpontok távolságát és írjuk fel a körök középpontjain átmenő egyenes egyenletét!

4. Írjuk fel az $A(1, 0)$ $B(9, 0)$ $C(5, 8)$ pontokon átmenő kör egyenletét!

5. Írjuk fel a kör egyenletét, ha ismerjük a középpontját és a sugarát: $C(4, 5)$ $r = 3$

$$C(3, 3) \quad r = \sqrt{5}$$

$$C(-1, 3) \quad r = 5$$

$$C(2, 0) \quad r = 3,5$$

$$C(0, -3) \quad r = \sqrt{13}$$

6. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek
 a) középpontja a $C(4, 3)$ pont, és áthalad az origón;
 b) középpontja a $C(-3, 4)$ pont, és áthalad az origón;
 c) középpontja a $C(5, -2)$ pont, és áthalad az $A(4, 3)$ ponton.
7. Határozzuk meg a $(2, 3)$ középpontú és az $r = 5$ sugarú kör a) $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ abszcisszájú pontjainak az ordinátáit, b) az $1, 0, -5$ ordinátájú pontjainak az abszcisszáit.
8. Írjuk fel a kör egyenletét, ha az átmérőjének a végpontjai
 $A(1, 1), B(5, -1)$ $A(4, 1), B(2, 3)$ $A(-5, 4), B(3, 2)$
9. Induljunk ki az $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 36$ körből, és a) tükrözzük az x tengelyre, b) tükrözzük az y tengelyre, c) tükrözzük az origóra. Írjuk fel az így kapott körök egyenletét.
10. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a következő ponton, és mindkét koordinátatengelyt érinti (ez három különböző feladat). a) $A(2, 9)$, b) $B(6, 3)$, c) $C(4, 2)$
11. Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek a sugara 5 egység, áthalad a $A(9, 9)$ ponton, és
 a) érinti az x tengelyt, b) érinti az y tengelyt.
12. Írjuk fel az $A(-2, 4)$ és a $B(4, 2)$ pontokon áthaladó $\sqrt{20}$ sugarú kör egyenletét.
13. Határozzuk meg a következő köregyenletekből a középpontok koordinátáit, a sugarakat:
 $x^2 + y^2 = 25$ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 25$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$
 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 36 = 0$ $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$ $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$
 $x^2 + y^2 + 10x = 0$
14. Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ és az $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$ körök középpontjain áthaladó egyenes egyenletét.
15. Hogyan helyezkednek el a $A(2, 3), B(3, -3), C(-4, -2), D(-4, 3)$ pontok az
 $x^2 + y^2 = 20$ körhöz viszonyítva?
16. Hogyan helyezkednek el a $A(-3, 0), B(5, 0), C(4, 2), D(2, 7)$ pontok az
 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ körhöz viszonyítva?
17. Hogyan helyezkednek el a $A(-1, 3), B(-4, 3), C(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ pontok az
 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ körhöz viszonyítva?
18. Határozzuk meg az $A(-1, 1), B(4, 2), C(4, -4)$ pontokon áthaladó kör egyenletét!

19. Az $A(6, 5)$ $B(8, 1)$ $C(0, -3)$ $D(-1, 4)$ pontok egy négyszöget határoznak meg. Számolással vizsgáljuk meg, hogy a négyszög húrnégyszög-e!

Kör és egyenes, két kör

20. Határozzuk meg a kör és az egyenes közös pontjainak számát.

$$x^2 + y^2 = 25 \quad 2x + y = 10$$

$$x^2 + y^2 = 10 \quad 3x + y = 10$$

21. Milyen helyzetűek a következő egyenesek az $x^2 + y^2 = 36$ körhöz képest?

$$x - 2y + 5 = 0$$

$$5x - 12y + 26 = 0$$

$$3x - 4y + 30 = 0$$

$$x + y - 17 = 0$$

22. Határozzuk meg a kör és az egyenes közös pontjainak számát.

$$a) \quad x^2 + y^2 - 5x = 0 \quad y = x - 2$$

$$b) \quad x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad 3x - y = 0$$

23. Milyen helyzetű a $3x - y = 7$ egyenes az $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$ körhöz képest?

24. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű kör és az $x - y = 1$ egyenletű egyenes metszéspontjainak a koordinátáit!

25. Hogyan kell az m értékét megválasztani, hogy az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körnek és az $y = mx + 6$ egyenletű egyenesnek kettő, illetve egy közös pontja legyen, illetve ne legyen közös pontjuk?

26. Számítsuk ki az $x - 2y = 8$ egyenletű egyenes azon pontjainak a koordinátáit, amelyek a $P(3, 0)$ ponttól 5 egységnyi távolságra vannak!

27. Határozzuk meg a b paraméter értékét úgy, hogy a $3x - 2y = b$ egyenletű egyenes érintse az $x^2 + y^2 = 9$ egyenletű kört!

28. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 5$ egyenletű körnek a $2x - y = 1$ egyenletű egyenesre merőleges érintőit! Számítsuk ki az érintési pont koordinátáit!

29. Írjuk fel az $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 7$ egyenletű kör 2 abszcisszájú pontjában rajzolható érintő egyenletét! Hány megoldás van?

30. Írjuk fel az $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 75$ egyenletű körnek azon érintőit, amelyek párhuzamosak az $y = -\frac{1}{2}x + 1$ egyenessel!

31. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2, 1)$ ponton, és a $3x - 2y = 6$ egyenletű egyenest annak 4 abszcisszájú pontjában érinti!

32. Írjuk fel a kör egyenletét, amely átmegy az $A(2, 1)$ ponton, érinti az x tengelyt, középpontja pedig az $x - 2y = 1$ egyenletű egyenesre illeszkedik.

33. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $A(3, 0)$ és $B(-1, 2)$ pontokon, és a középpontja az $x - y + 2 = 0$ egyenesre illeszkedik.

34. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $A(0, 4)$ ponton, és az $y = x - 3$ egyenest a 4 abszcisszájú pontjában érinti.
35. Határozzuk meg, hogy mely pontokban metszik ezek a körök a koordináta-rendszer tengelyeit!
 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$
36. Milyen távolságra van az $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 2 = 0$ kör középpontja a $3x + 4y = 2$ egyenestől?
37. Írjuk fel a kör egyenletét, ha a középpontja
 a) a $C(0, 0)$ pont, és a kör érinti a $2x - y - 5 = 0$ egyenest,
 b) a $C(2, 3)$ pont, és a kör érinti a $x - 3y + 4 = 0$ egyenest,
 c) a $C(-1, 2)$ pont, és a kör érinti a $4x - y - 5 = 0$ egyenest.
38. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely
 a) érinti a $4x - 3y = 26$ egyenest az 5 abszcisszájú pontjában, és áthalad a $A(-2, -3)$ ponton,
 b) érinti a $2x + y = 8$ egyenest a 4 abszcisszájú pontjában, és áthalad a $B(7, 3)$ ponton.
39. Valamely kör egyenlete $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$. Határozzuk meg a $P(1, 3)$ ponton áthaladó legrövidebb húr egyenletét és hosszúságát.
40. Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyek az $x + 2y = 7$ egyenesre illeszkednek, és a $P(3, 7)$ ponttól 5 egység távolságra vannak.
41. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 25$ kör $P(4, 3)$ pontjához tartozó érintőjének az egyenletét.
42. Az $x^2 + y^2 = 100$ körhöz érintőket húzunk a $P(6, 8)$ és a $R(8, 6)$ pontokban. Számítsuk ki az érintők metszéspontját.
43. Keressük meg az
 a) $x^2 + y^2 = 25$ körnek a $4x - 2y = 7$ egyenessel párhuzamos érintőit.
 b) $x^2 + y^2 = 5$ körnek a $2x - y + 1 = 0$ egyenessel párhuzamos érintőit.
44. Írjuk fel a) az $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ kör $P(5, 5)$ pontjához tartozó érintőjének az egyenletét.
45. Az $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 18 = 0$ körhöz egy rajta kívül fekvő P pontból érintőket rajzolunk. Számítsuk ki a P pont koordinátáit, ha az érintési pontokon áthaladó szelő egyenlete $x - y - 2 = 0$.
46. Az $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 66 = 0$ körhöz érintőket húzunk, melyek párhuzamosak a $4x - 3y = 0$ egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenleteit és az érintési pontok koordinátáit.
47. A $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$ körhöz érintőket húzunk, amelyek párhuzamosak az $y = 3x$ egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenleteit.
48. Az $x^2 + (y - 2)^2 = 5$ körhöz érintőket húzunk, amelyek merőlegesek az $y = 0,5x + 1$ egyenesre. Írjuk fel az érintők egyenleteit.

49. Írjuk fel az $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ kör $(3, 1)$ ponton áthaladó érintőinek az egyenletét!
50. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$ körnek azokat a pontjait, amelyek az $(5, -1)$ ponttól öt egység távolságra vannak.
51. Mi annak a körnek az egyenlete, amelynek középpontja a $C(6, 4)$ pont, és az $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ kört kívülről érinti?
52. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 100$ kört a $(7, 8)$ pontban belülről érinti, és az x tengelyt is érinti.
53. Számítsuk ki, hogy a $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$ körhöz a $P(-4, 6)$ pontból mekkora érintőszakasz húzható.
54. Számítsuk ki a két kör közös pontjainak koordinátáit! $x^2 + (y-4)^2 = 10$ $(x-8)^2 + y^2 = 50$
55. Vizsgáljuk a következő körök viszonylagos helyzetét!
- a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 5 = 0$
- b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ $x^2 + y^2 - 6y - 3 = 0$

A parabola egyenlete

56. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a) fókusza a $(-7, 0)$ pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $x - 7 = 0$, b) fókusza a $(0, -4)$ pont, és a vezéregyenesének az egyenlete $y - 4 = 0$.
57. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha adott a vezéregyenesének az egyenlete és a fókusza.
- $y+1=0$ $(4, 3)$ $y-3=0$ $(2, -3)$ $y-6=0$ $(3, -2)$ $x-1=0$ $(4, 2)$
58. Írjuk fel a parabola egyenletét, ha adott a tengelypontja és a fókusza.
- $T(-1, 2)$ $F(-1, 4)$ $T(4, 2)$ $F(8, 2)$
59. a) Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a fókusza a $F(0, 6)$ pont, a tengelye az y tengely, és a fókuszának a vezéregyenesestől való távolsága 8 egység.
b) Írjuk fel a parabola egyenletét, ha a fókusza a $F(6, 2)$ pont, a tengelye párhuzamos az x tengellyel, és a fókuszának a vezéregyenesestől való távolsága 4 egység.
60. Határozzuk meg a parabola fókuszának a koordinátáit, a paraméterét és a vezéregyenesének az egyenletét.
- $y^2 = 24x$ $y^2 = -8x$ $x^2 = 6y$ $x^2 + y = 0$ $4y^2 + x = 0$ $(x-5)^2 = 8(y+6)$
61. Határozzuk meg a parabola fókuszának a koordinátáit, a paraméterét és a vezéregyenesének az egyenletét.
- $(y-2)^2 = 12(x+3)$ $(y-3)^2 = -4(x+1)$ $y^2 = 4x-8$ $y^2 = 4-6x$ $x^2 = 6y+2$

62. Határozzuk meg a parabola fókuszának a koordinátáit, a paraméterét és a vezéregyenesének az egyenletét.

$$x^2 = 2 - y \quad y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2 \quad y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7 \quad y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$$

63. Határozzuk meg a parabola fókuszának és csúcpontjának koordinátáit, a szimmetriatengelyének és a vezéregyenesének az egyenletét.

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 \quad y = 4x^2 - 2x + 1 \quad y = \frac{1}{4}x^2 + 3x \quad y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1 = 0$$

64. Tükrözzük az a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$, b) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ parabolákat az $y = x$ egyenesre, majd határozzuk meg az így kapott parabolák tengelypontjának és fókuszának koordinátáit.

Parabola és egyenes, parabola és kör

65. Milyen hosszú az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolának az a húrja, amelynek egyenese a parabola fókuszán halad át, és a normálvektora $(-2, 1)$?

66. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{12}x^2$ parabolának a -6 abszcisszájú pontjában a parabolához húzott érintő egyenletét.

67. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolának a $P(2, 4)$ ponton áthaladó érintőnek egyenletét.

68. Határozzuk meg az m értékét úgy, hogy az $y = mx - 2$ egyenes érintse az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolát.

69. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{8}x^2$ parabolának az $y = -x + 4$ egyenessel párhuzamos érintőjét.

70. Az $x^2 = 16y$ parabolához érintőt húzunk, amely merőleges az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenesre. Írjuk fel az érintő egyenletét!

71. Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ parabolának az $y = x$ egyenessel párhuzamos érintőjén az érintési pont koordinátáit.

72. Határozzuk meg az $y^2 = 2px$ parabolában a p értékét úgy, hogy a parabola érintse az

$$\text{a) az } y = \frac{x}{2} + 1, \quad \text{b) az } x - 2y + 5 \text{ egyenest.}$$

73. Határozzuk meg az $(5, -7)$ pontból az $y^2 = 8x$ parabolához húzható érintők egyenletét!

74. Érdekes a feladat szövege. Egy parabola tengelypontja az $y^2 = 8x$ parabola fókusza, a fókusza pedig az adott parabola tengelypontja. Számítsuk ki a parabolák metszéspontjait!

75. Az origón átmenő, felfelé néző parabolának $(y = \frac{1}{2p}x^2)$ és az origón átmenő elsőfokú függvénynek $(y = mx)$ a p és m milyen értékeire van és milyen értékeire nincs közös pontja?
76. Egy parabola egy pontja $A(11, 9)$ tengelypontja $T(7, 1)$, tengelye párhuzamos az y tengellyel. Mennyi a paramétere és mi az egyenlete?
77. Milyen alakzatot alkotnak (adjuk meg az egyenletét) az x tengelyt érintő, $(0, 4)$ ponton áthaladó körök középpontjai?
78. Hány pont határoz meg egy parabolát egyértelműen?
79. Az origóból elhajítunk egy testet az első síknegyedben. Határozzuk meg az egyenletét, ha 36 méterre repül úgy, hogy 12 magasságig emelkedik, utána süllyed.
80. Melyek az $y = \frac{x^2}{3}$ egyenletű parabolának azok a pontjai, amelyek az A és B pontoktól egyenlő távolságra vannak? $(-4, 2)$, $(4, -2)$
81. Az ABCD négyzet A csúcsa az $y = x^2 - 5x + 8,25$ egyenletű parabola csúcsában, B és D szintén a parabolán van. Adjuk meg a négyzet csúcsainak koordinátáit.
82. Határozzuk meg az $y^2 = 2x$ parabolának a $(-4, -1)$ ponton átmenő érintőjének egyenletét!
83. Számítsuk ki a parabola és a kör metszéspontjának koordinátáit, ha egyenletük:
- $$y^2 = \frac{9}{4}x \quad x^2 + y^2 = 25 \quad y^2 = 18x \quad x^2 + 12x + y^2 - 64 = 0$$
84. Határozzuk meg az $y^2 = 6x$ parabola és a $x^2 + y^2 = 16$ kör hajlásszögét!

Az ellipszis és a hiperbola

85. Számítsuk ki az ellipszis nagy- és kistengelyét, fókuszainak a koordinátáit!
- $$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1 \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} = 1 \quad 3x^2 + 5y^2 = 15 \quad 2x^2 + y^2 = 4$$
86. Írjuk fel az ellipszis egyenletét, ha a nagytengelye 26 egység, fókuszai $(-10, 0)$, $(14, 0)$, b) a középpontja a $(-3, 4)$ pont, nagytengelye 10 egység, kistengelye 8 egység, és a nagytengelye párhuzamos az x tengellyel.
87. Számítsuk ki a hiperbola valós és képzetes tengelyének a hosszúságát és a fókuszok távolságát!
- $$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \frac{x^2}{9} - 4y^2 = 1 \quad 36x^2 - 64y^2 = 2304 \quad 4x^2 - 8y^2 = 32$$
88. Határozzuk meg annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek képzetes tengelye 10, fókuszai $(4, 4)$, $(-8, 4)$.

Mértani helyes feladatok

89. Mi azon pontok mértani helye, amelyeknek az $(1, 0)$ ponttól mért távolságuk négyzetének a számértéke egyenlő az $x = 1$ egyenestől mért távolságukkal?
90. Mi a $(3, 4)$ ponton áthaladó és az x tengelyt érintő körök középpontjainak mértani helye?
91. Mi azon körök középpontjainak mértani helye, amelyek érintik az $x = 10$ egyenest, és áthaladnak a $(2, 1)$ ponton?
92. Mi azon pontok mértani helye, amelyeknek az $(1, 0)$ ponttól feleakkora távolságra vannak, mint az $x = 4$ egyenestől?
93. Mi azon pontok mértani helye, amelyeknek a $(3, 2)$ ponttól kétszer akkora távolságra vannak, mint az y tengelytől?
94. Mi azon pontok mértani helye, amelyeknek az $(0, 9)$ ponttól háromszor akkora távolságra vannak, mint az $y = 1$ tengelytől?
95. Hol vannak a síkban azok a pontok, amelyek a) kétszer akkora, b) feleakkora távolságra vannak az $x=1$ egyenletű egyenestől, mint a $(7, 0)$ ponttól?
96. Hol helyezkednek el a síkban azon körök középpontjai, amelyek érintik az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört és átmennek a $(8, 0)$ ponton?

Vegyes feladatok

97. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört belülről érinti a $(4, 3)$ pontban és érinti az abszcisszatengelyt.
98. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a $(-3, 4)$ pontban érinti és a sugara 15.
99. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amelynek a középpontja az $O(-3, -2)$ pont és érinti a $2x + y = 3$ egyenletű egyenest.
100. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az abszcisszatengelyt a $(3, 0)$ pontban érinti, és az ordinátatengelyből 8 egység hosszúságú húrt metsz ki.
101. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek a tengelye az y tengely, tengelypontja az origó és a fókusza a $(0, 3)$ pont.
102. Írjuk fel az $y^2 = 16x$ egyenletű parabola azon érintőjének egyenletét, amely átmegy az $5x - y = 7$ és a $2x + y = 14$ egyenletű egyenesek metszéspontján.

- 103.** Az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolának melyik pontja van legközelebb a (0, 5) ponthoz?
- 104.** Írjuk fel az $y^2 = x$ egyenletű parabola azon húrjának egyenletét, amelyet a (6, 1) pont felez.
- 105.** Az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolának melyik pontja van legközelebb a (0, 5) ponthoz?
- 106.** Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az $y = \frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolát érintse az $x^2 + y^2 = 25$ és az $(x-14)^2 + (y+2)^2 = 125$ egyenletű körök metszéspontjain átmenő egyenes.
- 107.** Adjuk meg azon P(x;y) pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:
a) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$ b) $(x^2 - y)^2 + (x^2 + y^2 - 14y + 36)^2 = 0$
- 108.** Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: A(4, 7), B(-6, -4), C(2, -3)
a) Számítsuk ki az ABCD paralelogramma AC és BD átlóegyeneseinek hajlásszögét.
b) Igazoljuk, hogy az ABCD paralelogramma területének mérőszáma egész szám.
- 109.** Tekintsük a $y = (p - 1)x^2 + 2x - (p + 1)$ egyenletű parabolákat, ahol p valós paraméter és $p \neq 1$. Melyek ezek közül azok a parabolák, amelyek az x tengelyt két, egész koordinátájú pontban metszik, vagy egy egész koordinátájú pontban érintik?
- 110.** Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + y^2 - 11x - 7y + c = 0$ egyenletű körből az x tengely háromszor akkora hűrt metsszen ki, mint az y tengely.
- 111.** Az $y = x^2$ egyenletű parabola fókuszpontját F, vezéregyeneseinek egy tetszőleges pontját P jelöli. Bizonyítsuk be, hogy a PF szakasz felező merőleges érinti a parabolát.
- 112.** Melyek a koordinátái annak az abszcisszatengelyre illeszkedő pontnak, amelyből az $x = y^2$ egyenletű parabolához két olyan érintőt lehet húzni, amelyek az y tengellyel egy szabályos háromszöget fognak közre? Számítsuk ki a kialakuló szabályos háromszög további csúcsainak koordinátáit.
- 113.** Egy rombusz egyik csúcsa A(-1, 4), egyik átlója pedig illeszkedik az $y = \frac{1}{2}x + 2$ egyenletű egyenesre. Számítsuk ki a négyszög hiányzó csúcsainak koordinátáit, ha tudjuk, hogy oldalának hossza $\sqrt{10}$.

IX. Valószínűségszámítás

- 1.** Egy urnában 3 fekete, 4 fehér és 8 piros golyó van. Visszatevés nélkül kétszer egymás után egy-egy golyót kihúzunk. a) Adja meg az eseményteret! b) Mennyi a valószínűsége, hogy egymás után két pirosat húzunk? c) Mennyi a valószínűsége, hogy egyik húzás sem fekete?
- 2.** Egy szabályos dobókocka egy lapjára az 1-es, két lapjára 2-es, három lapjára pedig 3-as szám van írva. A dobókockával kétszer dobunk egymás után. a) Adjuk meg az eseményteret. b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4?

3. Egy játékkockáról megállapították, hogy nem homogén (azaz „cinkelték”), s így az 1-es dobásának valószínűsége $1/4$, míg a vele szemben lévő 6-osé $1/12$. A többi szám dobásának valószínűsége egyenlő. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kockával páros számot dobunk?
4. Szabályos tetraéderek lapjaira a 0, 1, 2, 3 számokat írták. Két ilyen tetraéder feldobása után egy-egy szám alulra kerül. a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a takart számok összege 6? b) Legnagyobb valószínűséggel mennyi lesz a takart számok összege?
5. Az ötös lottón az egyik héten a következő számokat húzták ki: 47, 60, 65, 81, 89. A következő heti szelvényen ezeket a számokat jelöljük meg. Mekkora a valószínűsége, hogy telitalálatunk lesz?
6. Dani meg akarja látogatni egy budapesti barátját. Három úton is eljuthat hozzá, amely utakon hétköznap délután rendre 0,3; 0,2; 0,7 eséllyel kerül dugóba. Arra gondol, hogy egy véletlen kísérlettel fogja eldönteni, merre menjen. Feldob két szabályos pénzérmét, és ha két írást kap eredményül, akkor az első úton; ha egy fejet és egy írást, akkor a második úton; míg ha két fejet, akkor a harmadik úton fog menni. Mekkora az esélye, hogy a) dugóba kerül; b) nem kerül dugóba?
7. Panni lakóhelye közelében négy kis élelmiszerüzlet is van. Sajnos, a kenyér gyakran hamar elfogy. Az egyes üzletekben – eddigi tapasztalati szerint – rendre 0,7; 0,8; 0,9 és 0,65 eséllyel kap csak kenyeret szombaton délből. a) Milyen valószínűséggel fog kenyeret kapni egy szombat déli vásárlásnál, ha bármelyik boltba való indulás esélye azonos? (A záróra közelsége miatt csak egy boltot van ideje felkeresni.) b) Akkor milyen valószínűséggel kap egy szombat délből kenyeret, ha nem egyforma gyakorisággal választja a boltokat, hanem rendre 0,1; 0,4; 0,3; illetve 0,2 eséllyel? (A záróra közelsége miatt csak egy boltot van ideje felkeresni.)
8. Csapadékos, ködös idő esetén – a tapasztalatok szerint – minden tízezer útnak induló autó közül 4 baleset részese lesz, más időjárás esetén pedig csak 1. A csapadékos, ködös idő gyakorisága ősszel 20%. Mennyi az esélye, hogy egy novemberi napon egy útnak induló autót baleset ér?
9. Vegyszeres szúnyogirtás során a szúnyogok 80%-a elpusztul. A második permetezés már csak az életben maradtak 40%-át pusztítja el (ellenálló képesség fejlődik ki a „túlélőkben”), a harmadik írtás már csak a megmaradt szúnyogok 30%-ára halálos. a) 1 millió szúnyog közül átlagosan hány marad életben a három permetezés után? b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy kiválasztott szúnyog mindhárom permetezést túléli? c) Döngicse, a szúnyog, túlélte az első permetezést. Mekkora az esélye annak, hogy nem éli túl a további kettőt?
10. Egy 34 fős osztályban 18-nak a matematika, 15-nek az irodalom a kedvenc tantárgya, 5 tanulóknak mindkét tárgy a kedvence. Az osztályból 1 tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy a) a két tantárgy közül legalább az egyik a kedvenc tárgya; b) egyik tantárgy sem a kedvence?
11. Gyangóliában a kis gyangik 85%-a szőke. A gyanga népesség kb. 9 millió, és tudjuk azt is, hogy összesen kb. 150 millió szőke ember él Gyangóliában. Ezek alapján mondjon véleményt a következő érvelésről: „A gynangák nagy eséllyel szőkék. Találkoztam egy szőke emberrel. Nagy eséllyel gyanga lehetett.”
12. Egy készülék 50 alkatrészt tartalmaz. Az alkatrészek mindegyike esetén 0,3% annak a valószínűsége, hogy egy éven belül meghibásodik. a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a készülék a garanciaidőn (1 év) belül meghibásodik? b) Mennyire kell leszorítani az egyes alkatrészek egy éven belüli meghibásodásának valószínűségét, ha azt szeretné a gyártó cég, hogy a garanciaidőn belül ezer készülékből átlagosan legfeljebb 40 darab hibásodjék meg?

13. Két szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobott pontok összege 9-nél nagyobb, B azt, hogy az egyik kockán felül 6-os van. Határozzuk meg az $A + B$, illetve az AB esemény valószínűségét!
14. Egy csomag (32 lapos) magyar kártyából kihúztunk egy lapot. Az A jelentse azt az eseményt, hogy zöldet húztunk, a B azt az eseményt, hogy királyt. Határozzuk meg az A, a B az $A+B$ és az AB esemény valószínűségét!
15. Egy család kirándulni megy a hétvégén. Legyen A az az esemény, hogy a család fogaskerekű vasúttal utazik, B pedig jelentse azt, hogy libegőznek. Vizsgálja meg, hogy mit jelentenek a következő események! a) $A + B$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot \bar{A}$
16. Egy család kirándulni megy a hétvégén. Legyen A az az esemény, hogy a család fogaskerekű vasúttal utazik, B pedig jelentse azt, hogy libegőznek. Vizsgálja meg, hogy mit jelentenek a következő események! a) $\bar{A} \cdot \bar{B}$ b) $\bar{A} \cdot \bar{B}$ c) $A + \bar{A} \cdot B$
17. Egy szabályos dobókockát egymás után kétszer feldobunk. a) Mennyi a valószínűsége, hogy másodszorra nagyobb számot dobunk, mint elsőre? b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 10?
18. Egy dobókockával 8 dobást végeztünk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan háromszor dobunk 1-et?
19. Egy szabályos dobókockával az első hatosig dobunk. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy dobássorozat legfeljebb öt dobásból áll!
20. Három pénzérmét egyszerre feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyik fej lesz?
21. Két kockával dobva egyszerre mekkora valószínűséggel lesz a kapott számok közül a nagyobb (a nem kisebb) 3?
22. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két kockával dobva a kapott pontok összege
a) legalább 5, b) legfeljebb 9?
23. Melyik pontszámösszeg a legvalószínűbb három szabályos kockával dobva?
24. Egy társasjátékban a játékosok csak 6-ost dobva tehetik a bábujukat a startmezőre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Andrea az első hatost a) másodszorra dobja, b) ötödszörré dobja?
25. Kristóf szeretné tudni, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy egy kockával háromszor dobva legalább egyszer hatos jön ki. a) Hogyan lehet ezt kiszámítani? b) Mennyi a valószínűsége, hogy éppen harmadszorra sikerül az első hatost dobni? c) Mekkora az esélye, hogy Kristóf nem kezdheti el három dobás után sem azt a játékot, ahol 6-os dobással lehet beszállni?
26. Marcell időt és fáradságot nem kímélve a következőt játszotta: egy szabályos kockát addig dobott fel, amíg felülre nem került a 6-os. Ezt megismételte sokszor. Minden egyes esetben felírta, hányadik dobásra kapott először 6-ost. a) Véletlen-e, hogy a leírt 100 szám közül az 1-es fordult elő legtöbbször? b) Előfordulhatott-e, hogy a leírt számok között szerepelt a 21-es? Ha igen, akkor mennyi ennek a valószínűsége?
27. Feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej az eredmény, akkor egyszer; ha írás, akkor kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Mekkora annak a valószínűsége, hogy lesz hatos dobás?

- 28.** Feldobunk egy érmét: ha fej, akkor olyan kockával dobunk, amelynek 2 piros és 4 fehér lapja van; ha írás, akkor olyannal, amelynek 3 piros és 3 fehér lapja van. a) Mennyi a valószínűsége, hogy a kockával pirosat dobunk?
- 29.** Ha kockával 1 és 4 közti számot dobunk, akkor egy 3 piros és 5 fehér golyót; ha 5-öst vagy 6-ost dobunk, akkor egy 3 piros és 2 zöld golyót tartalmazó dobozból húzunk egyet. a) Mennyi a valószínűsége, hogy piros golyót húzunk?
- 30.** a) Egy 5 piros és 5 fehér golyót tartalmazó dobozból egy golyó kiesett (nem tudjuk, milyen). Mennyi a valószínűsége, hogy ebből a dobozból 2 golyót húzva mindkettő piros? b) Egy 5 piros és 5 fehér golyót tartalmazó dobozból két golyó kiesett (nem tudjuk, milyenek). Mennyi a valószínűsége, hogy ebből a dobozból 2 golyót húzva mindkettő piros?
- 31.** Ha a hét napjait véletlenszerűen összekevernénk, mekkora a valószínűsége, hogy a) hétfővel kezdődne és vasárnapkal végződne a hét; b) szerda és csütörtök szomszédos napok lennének?
- 32.** Egy 15 fiúból és 15 leányból álló osztályból 4 személyt kisorsolunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kisorsolt személyek között a) ugyanannyi fiú és lány szerepel; b) több leány, mint fiú szerepel?
- 33.** a) Egy házaspárnak négy lánygyermek van. (A fiúk, illetve lányok születési esélyét most vehetjük egyaránt 0,5-nek.) Mekkora a valószínűsége, hogy az ötödik gyerekük fiú lesz? b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy házaspárnak mind az öt gyermeke lány legyen (és egy fiú sem)? c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy ötgyerekes házaspárnak 2 fiú- és 3 lánygyermek legyen?
- 34.** Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 25-ös létszámú osztályban akad legalább két olyan tanuló, aki a) ugyanabban a hónapban; b) ugyanannyiadik héten; c) ugyanazon a napon született?
- 35.** Egy-egy cédulára felírtuk külön-külön az 1, 3, 4, 8, 9 számokat és ezt az öt cédulát dobozba tettük. Innen véletlenszerűen húzva és balról jobbra egymás mellé letéve a cédulákat, mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott ötjegyű szám a) páros, b) páratlan, c) 4-gyel osztható?
- 36.** Hét darab gyümölcsjoghurtot helyezünk el véletlenszerű sorrendben egymás mellett a hűtő polcán: 3 darab epereset és 1-1 darab őszibarackosat, almásat, citromosat, málnásat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az elhelyezés során az eperes joghurtok egymás mellé kerülnek?
- 37.** Homár és Tomi teniszeznek. Homár 0, 6, Tomi 0,4 valószínűséggel nyer meg egy játszmát. Összesen három játszmát játszanak, és az a győztes, aki több játszám nyer meg. a) Mekkora az esély arra, hogy Tomi gyengébb játékos léte megnyerje a versenyt? b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Tomi vesztes játszma nélkül nyeri meg a versenyt?
- 38.** Egy urnában fekete és piros golyók vannak, összesen 100 darab. 80-szor egymás után húzunk, ebből 79-szer piros a húzás eredménye. a) Mit jósol a 81. húzásra, ha az előző 80 húzás mindegyike után visszatettük a kihúzott golyót? b) Becsülje meg, hány piros és hány fekete golyó lehet az urnában? Indokolja is meg a választát!
- 39.** Egy kosárban 3 narancs és 2 alma van. Visszatevéssel véletlenszerűen kiválasztunk 4 gyümölcsöt. Jelölje x a kiválasztott narancsok számát. a) Milyen értékeket vehet x , és melyiket mekkora valószínűséggel? b) Mennyi a valószínűsége, hogy lesz narancs a választott gyümölcsök között. c) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 1 narancs lesz a kiválasztott gyümölcsök között?

40. Kamillának három vizsgát kell letennie. A vizsgák teljesítésének valószínűségét rendre 0,8; 0,9 és 0,7 értékre becsüli. Határozza meg annak az esélyét, hogy Benjamin a) mind a három vizsgát teljesíti; b) pontosan két vizsgát teljesít!

41. Egy urnában négy golyó van, melyek 1-től 4-ig meg vannak számozva. Visszatevés nélkül kihúzzunk két golyót. Jelölje a kihúzott golyókra írt számok összegét x . a) Milyen értékeket vehet fel x , melyiket milyen valószínűséggel? b) Határozza meg az x valószínűségi változó várható értékét és szórását!

42. a) Határozza meg, hogy milyen értékeket vehet fel 2 szabályos dobókockával dobva a kapott számok összege! b) Melyiket milyen valószínűséggel?

43. Két olyan dobókockával dobunk egyszerre, melyek mindegyikének egy oldalára a 0-s, két oldalára a 3-as és három oldalára a 6-os számjegy van írva. a) Milyen értékeket vehet fel a dobott számok összege, melyiket milyen valószínűséggel?

44. Egy urnában 5 cédulán „1”, 3 cédulán „2”, 1 cédulán „3” szerepel. a) Kihúzva egy cédulát, milyen eredmény milyen valószínűséggel fordulhat elő? b) Ha két cédulát húzzunk egyszerre, mekkora valószínűséggel lesznek egyformák?

45. Egy dobozban lévő 50 golyó közül 45 fekete és 5 piros. Találomra kihúzzunk a golyók közül 5-öt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy közöttük pontosan egy piros van?

46. Egy urnában 4 piros és 6 fehér golyó van. Kihúzzunk egy golyót, felírjuk a színét és visszatesszük az urnába. Ezt megismételtük még háromszor. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 4 húzás közül pontosan egyszer szerepel a piros golyó?

47. Egy urnában 4 piros és 8 fehér golyó van. Kihúzzunk egy golyót, majd visszatesszük. Ezt még négyszer megismételjük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan háromszor fehéret húzzunk?

48. Egy csomag (32 lapos) magyar kártyából kihúzzunk egy lapot, majd visszatesszük azt. Ezt megismételjük még ötször. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan háromszor piros lapot húzzunk?

49. Egy virágkertészetben azt állítják, hogy 0,9 valószínűséggel kihajtanak a náluk kapható tulipán-hagymák. Egy kertépítő vásárolt 100 hagymát, s ebből csak 80 hajtott ki. Ezért visszament panaszt tenni, hogy ő legalább 90 tő tulipánt akart, s azért vett 100-at, mert a kertészet állítását úgy értelmezte, hogy ebből pontosan 90 fog kihajtani. Mennyi a valószínűsége, hogy 0,9-es kihajtási valószínűség esetén 100 tő közül éppen 90 hajt ki?

50. Határozza meg, mik a lehetséges kimenetek a következő kísérletekben, és melyik milyen valószínűségű. a) Egy játékautomatánál a nyerés valószínűsége 0,2. Öt egymás utáni játékban vizsgáljuk a nyerések számát. b) Három pénzérmét feldobva vizsgáljuk a fejek számát.

51. Egy szülészeten egy nap alatt 18 gyermek jött a világra. Az újszülöttekről feltesszük, hogy ugyanolyan eséllyel lesznek fiúk, mint lányok. a) Mekkora az esélye, hogy a született fiúk száma legalább 3-mal nagyobb, mint a lányoké? b) Mennyi az esélye, hogy ugyanannyi fiú született, mint lány? c) Hogyan változik a b)-beli esély, ha a fiúszületés esélyére a világátlagot: 0,512-t vesszük alapul?

52. Egy csomagküldő szolgálat tapasztalatai szerint azoknak az embereknek, akik kaptak árukatalógust, a 60%-a rendel valamilyen árut. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 10 olyan ember közül, akik kaptak katalógust a) legfeljebb 4; b) legalább 8 rendel árut?

53. Ha egy virág színéért felelős gén mindkét allélja azonos, akkor ettől függően a virág vagy piros, vagy fehér lesz. Ha a két allél különböző, akkor rózsaszín. Két rózsaszínű virág keresztezésekor 0,25-0,25 valószínűséggel hajt ki piros, illetve fehér, 0,5 valószínűséggel rózsaszín virág. Két rózsaszínű virág keresztezéséből 10 palántát nevelünk, amelyek mind kihajtanak. a) Hány piros virág lehet közöttük, melyik mekkora valószínűséggel? b) Hány fehér virág lehet közöttük, melyik mekkora valószínűséggel? c) Hány rózsaszín virág lehet közöttük, melyik mekkora valószínűséggel?

54. Egy vizsgán a kérdésekre „igen”-nel vagy „nem”-mel kell válaszolni. Egy tanuló „vakon” tippel, azaz 0,5 valószínűséggel felel „igen”-nel, illetve „nem”-mel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a feltett 10 kérdésből a) legalább 5-re; b) legalább 7-re; c) mind a 10-re helyesen válaszol?

55. Mielőtt felvételi vizsgára mentem, a tanárom azt mondta, hogy kb. 60% esélyem van hogy 15 pontos felvételit írok. A vizsgára készüléskor 7 felvételi feladatsort oldottunk meg. Felteve, hogy a tanáromnak igaza volt, mennyi a valószínűsége annak, hogy 15 pontot írtam a) mind a 7 feladatsoron; b) a 7-ből pontosan 6 feladatsoron; c) a 7-ből pontosan 5 feladatsoron?

56. Gréti hosszú idő óta versenyez magasugróként. Ugrásai technikailag jól kivitelezettek, de teljesítőképességének felső határa közelében már „csak a véletlenül múlik”, hogy egy ugrása sikeres lesz-e. Edzője megállapította, hogy egy-egy versenyen jó közelítéssel 0,54 annak a valószínűsége, hogy Gréti teljesíti a 205 cm-es magasságot. (Egy magasságon háromszor lehet kísérletet tenni, ha harmadikra sem sikerül átugrani, akkor a versenyző kiesett.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy versenyen Gréti elsőre átugorja a 205 cm-t?

57. Egy üzemben 500 elkészült munkadarab közül 10 selejtes. A minőség-ellenőrzés során találmra kivesznek az 500 közül 20-at. Mekkora valószínűséggel van ezek között a) 0; b) 3; c) 5 selejtes?

58. Matematikaórán a 27 fős osztályból 5-en hiányoznak. A tanár 3 diákot akar feleltetni, akiket sorsolással választ ki. Mekkora a valószínűsége, hogy a) senki nem felel, mert mindhárom kisorsolt diák hiányzik; b) egy felelő lesz, mert a kisorsoltak közül ketten hiányoznak?

59. Egy iskolai rendezvényen 30 ajándékot sorsolnak ki az eladott 500 tombolajegy vásárlói között. Ha 10 tombolajegyet vettünk, mennyi a valószínűsége annak, hogy a) nyerünk; b) pontosan két ajándékot nyerünk?

60. Egy nagyvárosban a diákok 1,5%-ánál találtak legalább 150-es IQ értéket, ők a zsenik. Találmra kiválasztottak 200 diákot. a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy lesz zseni a kiválasztottak között? b) Mennyi a valószínűsége, hogy nem lesz zseni a kiválasztottak között? c) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 zseni lesz a kiválasztottak között?

61. Egy tálban körülbelül 120 szem cseresznye van, közöttük 5% kukacos. Dóri egy marék cseresznyét (10 szem) kivesz a tálból. a) Mekkora a valószínűsége, hogy nincs közöttük kukacos? b) Mekkora a valószínűsége, hogy Dóri az összes kukacos cseresznyét kivette a tálból? c) Ha Andrea cseresznyéi között nem volt kukacos, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy az öccse által kimarkolt 10 szem között sem lesz?

62. Harminc darab 40 wattos és 70 darab 60 wattos égő közül találmra egymás után kiveszünk két darabot úgy, hogy az elsőnek kiválasztottat visszatesszük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a) mindkettő 40 wattos lesz; b) egyik sem lesz 40 wattos; c) csak az egyik lesz 40 wattos?

63. Egy csomag (32 lapos) magyar kányából találmra kihúztunk nyolc lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek között van legalább egy zöld?

64. Egy dobozban lévő 40 golyó közül 32 fekete és 8 piros. Találmra kihúzunk 4-et. Mennyi annak a valószínűsége, hogy van közöttük piros?

- 65.** Egy üzemben bizonyos alkatrészeket gyártanak. A meős megállapította, hogy a gyártott tízezer alkatrész 3%-a hibás. Egy kisüzem ezen alkatrészekből 2000-et rendel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 80 hibásat kap?
- 66.** Egy gyufagyárban a minőség-ellenőrzés során megállapították, hogy 0,95 valószínűséggel van pontosan az előirt (szabványos) 50 szál gyufa a dobozban, s csak 0,05 eséllyel több vagy kevesebb.
a) Mekkora az esélye, hogy 5 doboz gyufát véve mindegyikben pontosan 50 van? b) Mekkora az esélye, hogy legalább két dobozt találunk az öt doboz között, amelyik nem szabványos? c) Mekkora az esélye, hogy 100 doboz között pontosan 95 szabványos lesz?
- 67.** Egy csoportban 4 lány és 6 fiú van. Véletlenszerűen kisorsolunk a csoportból két főt. Mekkora az esélye, hogy egy lány és egy fiú lesz köztük?
- 68.** Közvélemény-kutatások készítése során a tapasztalatok szerint a kiválasztott emberek kb. 80%-át érik el. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a) 10 kiválasztott személyből legalább 8-at; b) 20-ból legalább 15-öt megtalálunk?
- 70.** Egy városban a tapasztalatok szerint az utasok 6%-a jegy nélkül utazik a metróban. a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 50 utast szállító kocsiban a) pontosan 2; b) legalább 3 potyautast találunk? c) Hány utas között találunk legalább 90%-os valószínűséggel legalább egy potyautast?
- 71.** Ezer kabátból 50-en szövési hiba van. Mennyi az esélye, hogy legfeljebb 1 lesz hibás, ha 10 kabátot veszünk?
- 72.** Világszerte a férfiak 17%-a balkezes, de szakértők úgy gondolják, hogy néhány távoli hegylakó törzsben ez a tulajdonság kevésbé gyakori. Egy antropológus meglátogat azon a vidéken egy falut, és 30 véletlenszerűen kiválasztott férfit megvizsgál. Közülük csak kettő balkezes. Alátámasztja-e ez az eredmény azt, hogy ezekben a hegyi törzsekben kevesebb balkezes férfi van, mint a világ más részén? (Számítsa ki, mennyi a valószínűsége 30 közül legfeljebb 2 balkezesnek!)
- 73.** Egy gépsor palackokat gyárt. Normális működés mellett a palackok 4%-a törött. a) Mennyi a valószínűsége, hogy 50 palackból legfeljebb 4 törött, ha a gép jól működik? b) Ha 50 üvegből legalább 5 törött, milyen valószínűséggel működik mégis jól gép?
- 74.** 2934. Egy autókat gyártó és forgalmazó cég hosszú évekre visszanyúló statisztikája azt mutatja, hogy az általuk beépített lengéscsillapítók 5%-e 3 éven belül meghibásodik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a szalonban levő 17 autóból háromnak a lengéscsillapítója 3 éven belül meghibásodik?
- 75.** A statisztikai adatok azt mutatják, hogy egy bizonyos ékszerüzlet előtt elhaladó nők 30%-a megáll, és megnézi a kirakatot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ékszerüzlet előtt véletlenszerűen elhaladó 10 nő közül legalább ketten megállnak a kirakat előtt?
- 76.** Egy kisüzem digitális mérőműszereket gyárt. Ellenőrzés közben rájöttek, hogy 200 darab legyártott műszer közül 15 hibás. ha 200 műszer közül véletlenszerűen kiválasztunk 10 darabot, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy a) mind a 10 hibátlan lesz, b) pontosan 3 lesz hibás, c) legfeljebb 2 lesz hibás, d) mind a 10 hibás lesz?
- 77.** Egy 1000 fős településen éppen 300 nyugdíjas él. Egy közvélemény-kutató intézet kiküld egy kérdezőbiztost, aki 20 személyt választ ki véletlenszerűen a településen. Mekkora eséllyel lesz közöttük a) éppen 6 nyugdíjas; b) legalább 2 nyugdíjas?

- 78.** Egy kalapban száz egyforma golyó van, 1-től 100-ig megszámozva. Véletlenszerűen választunk közülük a) egyszerre kettőt; b) visszatevéssel kétszer egymás után egyet-egyet.
- 79.** Hány dobókocka esetén a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy a kockákat egyszerre feldobva, a kapott számok között pontosan egy 6-os van?
- 80.** Egy villamosvezető p valószínűséggel nyitja ki egy villamos összes ajtaját egyenként a megállóban. a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy ajtót ki kell nyitnia a nyolcból egy adott megállóban? b) Milyen p értéktől kezdődően fog a vezető 0,5-nél nagyobb valószínűséggel kinyitni legalább egy ajtót egy adott megállóban?
- 81.** Egy 9 tagú társaság felszáll a három kocsiból álló HÉV szerelvényre, de a nagy tolongásban a társaság minden tagja csak azt nézi, hogy feljusson valamelyik kocsira, nem törődik azzal, hogy a társai melyik kocsiba szálltak.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom kocsiba a társaság 3-3 tagja szállt? b) Mennyi a valószínűsége, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe nem szállt fel senki a társaság tagjai közül? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a három kocsi közül legalább az egyikbe legfeljebb egy ember szállt fel a társaságból?
- 82.** Mi a valószínűsége annak, hogy egy 30 fős társaságban nincs két olyan ember, akiknek a születésnapja megegyezik?
- 83.** Mi valószínűbb, 6 kockával legalább egy darab egyest vagy 12 kockával legalább két darab egyest dobni?
- 84.** A 32 lapos kártyacsomagból kihúzzunk 6 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek között mind a négy szín előfordul?
- 85.** Ezer újszülött között átlagban 516 fiú. Mi a valószínűsége, hogy egy 6 gyermekes családban a fiúk száma legalább annyi, mint a lányoké?
- 86.** Annak a valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyagellátás valamely napon zavartalan, 0,75. Mekkora a valószínűsége, hogy 6 napon keresztül csak 3 napon át lesz a nyersanyagellátás zavartalan?
- 87.** Két doboz gyufát zsebre teszünk. Mindkét dobozban 50-50 szál gyufa van. Ezután, mikor gyufát kell gyűjtani, találomra vagy az egyik vagy a másik dobozból veszünk ki egy szálát. Ezt addig folytatjuk, míg egy olyan dobozt nem választunk, amely már üres. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan 13 szál gyufa van még?
- 88.** Van egy kétoldalú érménk, amelyen pontosan szabályozható, hogy egy feldobásnál melyik oldal mekkora valószínűséggel következik be. Milyen valószínűséggel legyen egy feldobás valószínűsége írás, ha azt szeretnénk, hogy az írás maximális valószínűséggel következzen be hat dobásból ötször?
- 89.** Egy szerencsekerék minden körcikkéhez különböző nyereményt tartozik, az egyes nyeremények azonos valószínűséggel következnek be. Annak a valószínűsége, hogy kilenc forgatásból néhány alkalommal a főnyeremény adódik megközelítően 0,25. Hány alkalommal forgattuk ki kilenc próbálkozásból a főnyereményt? (A feladat megoldása során kerekítsük két tizedesjegyre a kapott értékeket.)
- 90.** Van egy nem szabályos dobókockánk, amelyen pontosan szabályozható, hogy melyik érték mekkora valószínűséggel következzen be. Milyen értékre állítsuk be az ötös dobás valószínűségét, ha azt akarjuk, hogy nagyobb valószínűséggel következzen be hét dobásból hatszor, mint négyszer?

91. Egy sorsjegyjátéknak csak két eredménye lehet: nyerünk vagy veszünk. Annak a valószínűsége, hogy hat sorsjegyet véve kétszer nyerünk ugyanannyi, mint hogy hat sorsjegyből kétszer veszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szelvénnel nyerünk?

92. Egy szabálytalan érmével kétszer dobva annak a valószínűsége, hogy egy fej és egy írás lesz: 0,18. Mennyi a valószínűsége a fejnek és mennyi az írásnak?

93. Egy társasjátékban a játékosok minden fordulóban négyszer dobnak a szabályos kockával. A játékban kiemelt fontosságú, hogy ki hány db hatost dobott. Számítsuk ki az összes lehetséges hatos dobások számának valószínűségét.

94. Nyolc kocka mindegyikével sorban egymás után egyszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két dobás esetén összetett számot kapunk?

95. Van egy nem szabályos dobókockánk, amelyen pontosan beállítható, hogy melyik érték mekkora valószínűséggel következzen be. Mennyire állítsuk be az egyes dobás valószínűségét, ha azt szeretnénk, hogy nagyobb valószínűséggel következzen be hétszer, mint nyolcszor tíz dobásból?

96. Marcell, a kosárlabdázó 0,35 valószínűséggel dob egy három pontosat. Az edző a tegnapi meccs statisztikái alapján dicséri Marcellt, mert csak egy három pontos dobását rontotta el a négyből.

a) Mennyi volt előzőleg ennek a valószínűsége? b) Mennyi a valószínűsége, hogy a következő meccsen Marcell hét három pontos kísérletből egyszer talál be?

97. Egy ruhazsákban 15 kamillás és 25 mentolos papírzsebkendő van. Öt zsebkendőt veszünk ki véletlenszerűen. Hány darab kamillás lesz közöttük a legnagyobb valószínűséggel? Számítsuk ki az összes lehetséges eset valószínűségét.

98. Egy versenyre 17 fiú és 23 lány jelentkezett. A zsűri hét főt válogat a döntőbe. Mekkora valószínűséggel lesznek a) csak azonos neműek a döntőben, b) többen a lányok mint a fiúk a döntőben?

99. A nagypályás focimeccs egyik pillanatában Natasa megállapítja, hogy a kezdőkörben éppen öt játékos tartózkodik. Mennyi a valószínűsége, hogy ekkor mindkét csapatból voltak a kezdőkörben, ha a játékosok teljesen véletlenszerűen tűnnek fel a pálya bármelyik pontján?

100. Bálint összehord minden tücsköt-bogarat – egészen pontosan 135 tücsköt és 92 bogarat. Véletlenül 15 állat kiszabadul Levente legnagyobb örömére. Mekkora valószínűséggel megy el legalább három bogár a kissé bogaras Bálinttól?

101. Barnabásnak egy nagy zsákban van 63 labdája, ezek között 42 egyszínű, a többi tarka. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 labdát véletlenszerűen kivéve a zsákból pontosan hét egyszínű lesz közöttük?

Vegyes feladatok

102. Mennyi a valószínűsége, hogy ötöslottón kétszer egymásután ugyanazokat a számokat húzzák ki?

103.a Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány feketét kell hozzátenni, hogy fekete golyó húzásának a valószínűsége nagyobb legyen 0,9-nél?

103.b Egy okostelefon banki applikációja a belépéshez négyjegyű PIN-kódot kér, de biztonsági okokból mindig véletlenszerűen osztja ki a számjegyeket az ábrán látható billentyűhelyekre úgy, hogy

minden lehetséges kiosztás valószínűsége azonos. (Egy lehetséges kiosztás szerepel az ábrán.) Ha négy különböző számjegyből áll a PIN-kódunk, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy két egymást követő belépés során ugyanazokban a pozíciókban hagyunk ujjlenyomatot?

104. Egy dobozban 9 fehér és 6 fekete golyó van. Hármát kivesszünk visszatevés nélkül. Adjuk meg a fehérek számának eloszlását, azaz számítsuk ki, mennyi a valószínűsége, hogy 0, 1, 2, 3 fehéret veszünk ki.

105. Egy kockát addig dobunk, míg a dobások között három darab hatost nem kapunk. Határozzuk meg a dobások számának eloszlását, azaz számítsuk ki, mennyi a valószínűsége, hogy a k -adikra kapjuk a harmadik hatost.

106. Rezső nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsit dereng, ezért 0,6 valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Mekkora valószínűséggel megy át Rezső a vizsgán, ha ehhez minimum 8 jó válasz kell?

107. Két doboz gyufát zsebre teszünk. Mindkét dobozban 50-50 szál gyufa van. Ezután, mikor gyufát kell gyújtani, találmra vagy az egyik vagy a másik dobozból veszünk ki egy szálat. Ezt addig folytatjuk, míg egy olyan dobozt nem választunk, amely már üres. Mi a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan 13 szál gyufa van még?

108. Annak a valószínűsége, hogy egy kollégium valamelyik lakója egy adott napon megbetegszik 0,002. Ha 1200 lakója van a kollégiumnak, hány ágyas betegszobát kell berendezni, ha azt akarjuk, hogy legfeljebb 0,01 legyen annak a valószínűsége, hogy egy betegnek nem jut ágy?

109. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

110. Tíz pár cipőből véletlenül kiválasztunk négy darabot. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz egy pár sem?

111. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthál van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthál). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthál megússza a horgászkalandot?

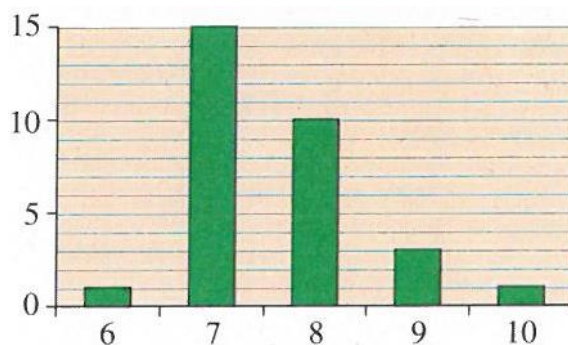
112. Egy szabályos játék kocka szemközti oldalain rendre az a , d , illetve b betű szerepel. Ketten játszanak, A és B . Aszerint, hogy a kockával a -t, illetve b -t dobnak, A egy és B nulla, illetve B egy és A nulla pontot kap. Ha d -t dobnak, akkor mindketten fél pontot kapnak. Hatszor dobják fel a kockát. Az győz, aki több pontot kap. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a) döntetlen lesz az eredmény, b) A győz?

113. Egy r sugarú kör valamely húrját úgy választjuk ki, hogy a húr felező pontját adjuk meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a húr hosszabb a körbe írt szabályos háromszög oldalánál, ha a húr úgy választjuk meg, hogy a körbe esetében egyenlő területű tartományokba egyenlő valószínűséggel esik?

114. Tizenöt golyót helyezünk el négy dobozban. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden dobozba legalább három golyó kerül?

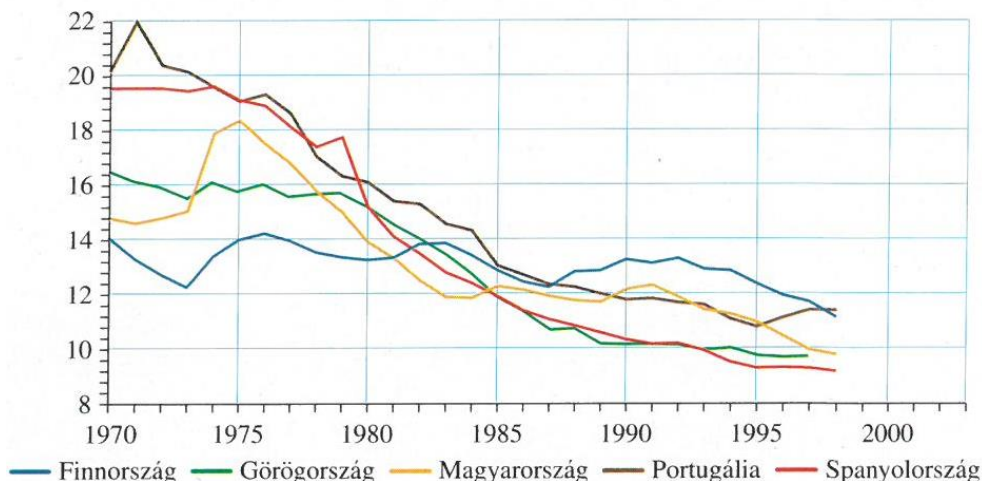
X. Statisztika

1. Az angoltanár otthon hagyta a csoport dolgozatait, csak a következő grafikont találta meg, amelyen a különböző pontokat elért dolgozatok darabszámát ábrázolta. Határozza meg a csoport pontszámainak átlagát, illetve a szóródási mutatókat!

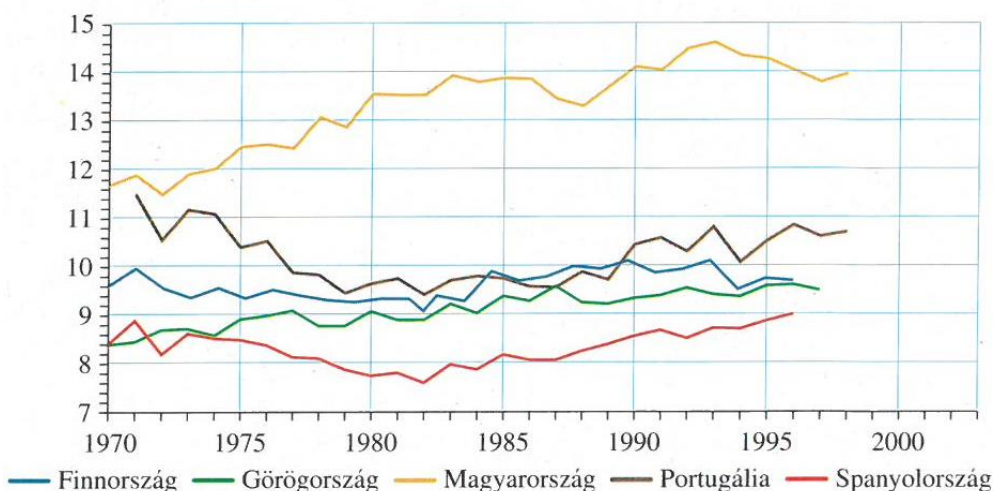


2. Egy kutatás során öt ország adatait hasonlították össze (Finnország, Görögország, Magyarország, Portugália, Spanyolország). Az alábbi két ábra az ezer főre jutó élve születéseket, illetve elhalálozásokat mutatja.

1000 főre jutó élve születések

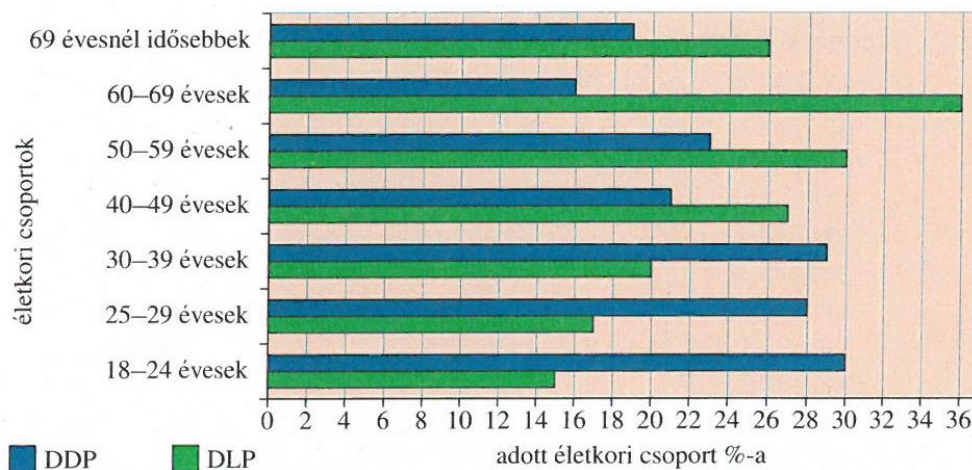


1000 főre jutó elhalálozások



- Foglalja táblázatba 1970-től 5 évenként Magyarország és egy másik megadott ország születési és halálozási arányszámait!
- Készítsen táblázatot Magyarország és egy másik megadott ország népességének változásáról 1970-től 1995-ig, 5 évenként, ezrelékben!

3. Dilburban a választások előtt felmérték a két legnagyobb induló párt támogatottságát a teljes szavazókorú népesség körében. A pártok neve DDP és DLP.

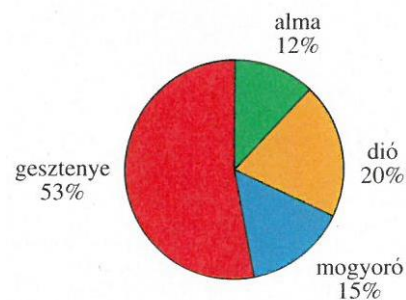


a) Foglalja táblázatba a diagram adatait!

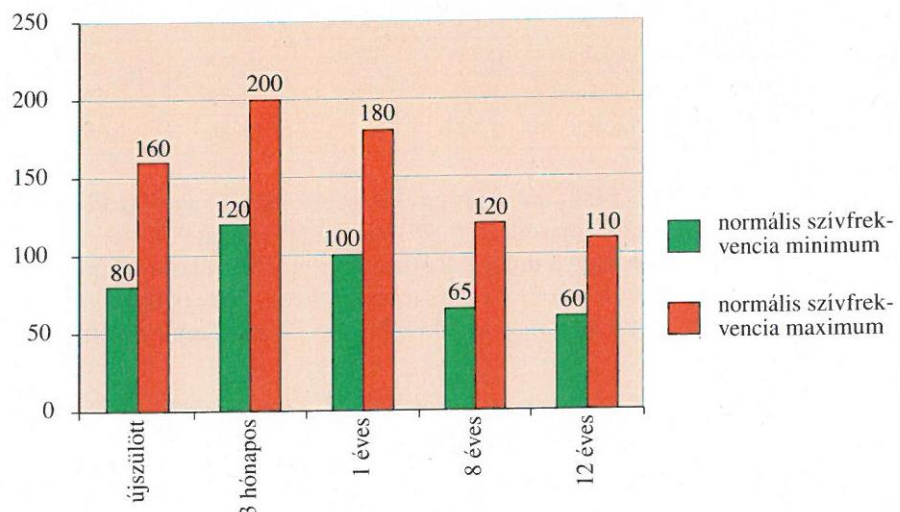
b) Megállapítható-e a fenti diagramból a két párt támogatottsága a teljes szavazó-korú népesség körében? Ha igen, hogyan; ha nem, akkor miért nem?

c) Az adatok alapján mit mondhatunk az egymást követő generációk („apák és fiúk”) pártszimpátiájáról? (Szülők és gyermekeik életkora között kb. 20-30 év különbség van.)

4. Készítsen előbb táblázatot, majd oszlopdiagramot az adott kördiagram alapján! Az elfogyasztott gyümölcsökben összesen 60 g szénhidrát volt. Ezek százalékos megoszlását tünteti fel az ábra.

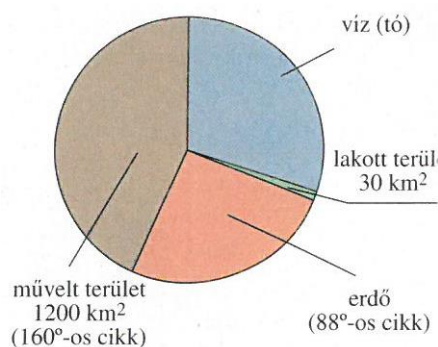


5. Az oszlopdiagram alapján számítsa ki a normális szívfrekvencia (pulzus-szám: a percenkénti lüktetések száma) minimumának és maximumának átlagát, mediánját!

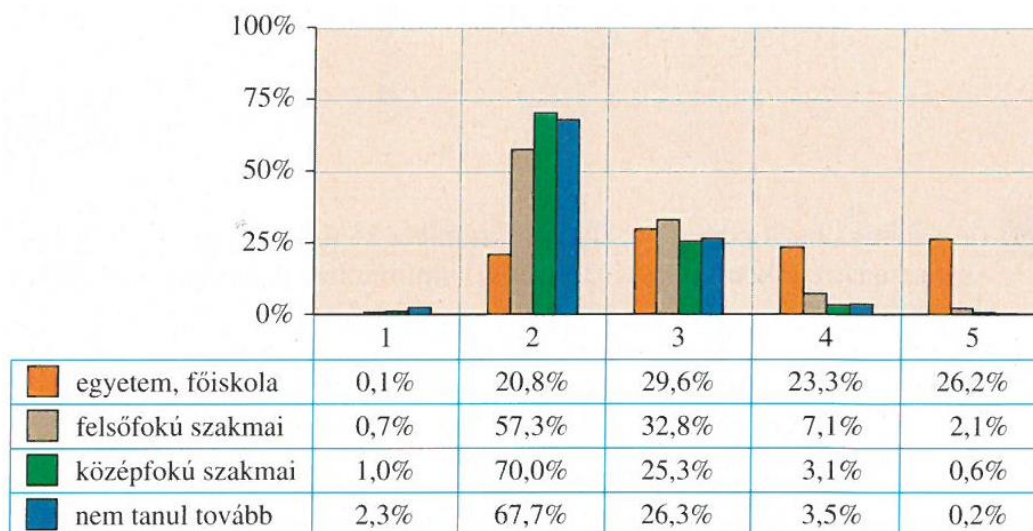


6.

Egy finnországi körzetben a lakott terület, az erdő, a megművelt föld, illetve a vízfelszín (tó) nagyságának aránya az alábbi vázlatos ábráról olvasható le. Számolja ki, mekkora a) az erdő területe, b) a lakott területhez tartozó szög, c) a körzet teljes területe!



7. A 2001-es iskolai matematika írásbeli érettségi jegyek megoszlását mutatja a következő grafikon a tanulók továbbtanulási szándéka szerint.



A grafikont kb. 32 000 dolgozat értékeléséből kapták, ahol az első sort (egyetem, főiskola) 85%-ban, a másodikat 9,8%-ban, a harmadikat 9,4%-ban, végül az utolsót 1,4%-ban jelölték meg a dolgozatok írói. Mivel több választ is meg lehetett jelölni, ezért 5,6% többlet adódott. Az egyszerűsítés kedvéért tegyük fel, hogy csak az első és a második sort jelölte meg az, aki többet jelölt meg, így ezt vegyük figyelembe a számításnál.

a) Számolja ki, hányan szereztek az írásbeli érettségin 5, 4, 3, 2, illetve 1-es osztályzatot!

b) Készítsen kördiagramot, amely a 3-as jegyet szerzők megoszlását mutatja a továbbtanulási szándékaik szerinti megoszlásban!

c) Ábrázolja sávdiagramon az elégtelenek (1), illetve a jelesek (5) eloszlását a továbbtanulási szándék szerint!

8. A XX. század utolsó öt olyan olimpiáján, amelyen a magyar csapat részt vett, a következő érmes helyezéseket érték el.

	Moszkva 1980	Szöul 1988	Barcelona 1992	Atlanta 1996	Sydney 2000
arany	7	11	11	7	8
ezüst	10	6	12	4	6
bronz	15	6	7	10	3

a) Ábrázolja az adatokat oszlopdiagramon!

b) Hány érmet nyertünk átlagban az egyes olimpiákon?

c) Hány arany-, ezüst-, bronzérmet nyertünk átlagban ezen az öt olimpián?

9. A táblázatban egy osztály valamely matematika dolgozatának eredményei szerepelnek. a) készítsen összesítést az osztályzatokról és ábrázolja diagramon! b) Mennyi a dolgozatjegyek átlaga és szórása?

B. A.	2	H. A.	2	L. Zs.	3	Sz. K.	2
D. V.	1	H. É.	2	L. E.	4	Sz. A.	4
F. A.	1	K. L.	2	M. A.	3	T. O.	2
F. L.	1	K. L.	4	N. A.	1	V. R.	2
G. D.	1	K. E.	5	N. D.	1	Zs. J.	5

10. A labdarúgó NB I állása a 2001. őszi szezon zárásakor a következő volt:

1. MTK	22	17	3	2	46 – 13	54
2. ZTE	22	13	4	5	44 – 26	43
3. Dunaújváros	22	10	7	5	43 – 23	37
4. Videoton	22	10	6	6	29 – 26	36
5. FTC	22	10	4	8	34 – 30	34
6. Újpest	22	8	5	9	39 – 40	29
7. Kispest	22	7	5	10	30 – 41	26
8. Debrecen	22	5	10	7	26 – 31	25
9. Sopron	22	6	5	11	33 – 42	23
10. Győr	22	4	9	9	27 – 38	21
11. Haladás	22	4	7	11	23 – 44	19
12. Vasas	22	4	3	15	24 – 44	15

(Az oszlopokban a lejátszott mérkőzések száma, a győzelmek, döntetlenek, vereségek száma, a gólkülönbség [rúgott – kapott gólok száma] és a megszerzett pontok száma állnak.)

- Mekkora a meccsenkénti góllátlag?
- Mekkora a csapatonként rúgott gólok átlaga?
- Mekkora a csapatonként kapott gólok átlaga? Mit tapasztal?
- Sorolja 10 gól tágasságú osztályokba (0-9, 10-19, ...) külön a rúgott, külön a kapott gólok száma alapján a csapatokat!

11. Egy ötlakásos társasházban a közös költségeket az ún. tulajdoni hányadok szerint, a fűtési költséget pedig külön arányok szerint fizetik a tulajdonosok. A tulajdoni hányad minden százalékára 260 Ft, a fűtési arány minden százalékára 340 Ft fizetendő be havonta.

	tulajdoni hányad	fűtési költség arány
M.	29,4%	30,1%
J.	10,6%	10,9%
E.	19,6%	21,8%
S.	30,9%	29,5%
P.	9,5%	7,7%

- Számítsa ki, hogy az egyes lakások után havonta melyik címen mennyit kell befizetni!
- Mennyi a havi összes befizetés egyik, illetve másik címen?
- Tekintse mindkét oszlopban a feltüntetett arányok átlagát! Mit tapasztal? Magyarázza meg!

12. A Földközi-tenger mediterrán országainak narancs és mandarin termelése a mellékelt táblázat szerint alakult 1978-ban. a) Számítsa ki a százalékos megoszlásokat, és ábrázolja kördiagramon! b) Az olaszországi termés hány százalékát adta Szicília, illetve Calabria, ha ott 1, illetve 0,65 millió tonna narancs és mandarin termett az adott évben?

ország	termelés (millió mázsa)
Spanyolország	25
Olaszország	19,6
Izrael	10
Marokkó	7,8
Egyiptom	7,8
többi ország együtt	15

13. Az évenkénti fogyasztói árindex alakulását mutatja két országban az alábbi táblázat.

év	Magyarország (%)	Nagy-Britannia (%)
1992	100	100
1993	122,5	101,6
1994	118,8	102,5
1995	128,2	103,4
1996	123,6	102,5
1997	118,3	103,1

- Szemléltesse vonaldiagramon a két adatsort (ugyanabban a koordináta-rendszerben)!
- Mekkora volt a két országban az 1997-es év árszínvonala 1992-höz képest?
- Átlagosan évi hány százalékos áremelkedés volt az 1992 végétől 1997 végéig terjedő időszakban az egyes országokban?

14. A „Magyar Statisztikai Zsebkönyv 2000” alapján megállapítható, hogy kül-, illetve belföldi vendégek hány ezer éjszakát töltöttek kereskedelmi szálláshelyen területi egységenként a 2000. évben.

	külföldi	belföldi
Közép-Magyarország	4 270	1 185
Közép-Dunántúl	1 539	1 016
Nyugat-Dunántúl	1 955	1 659
Dél-Dunántúl	1 402	1 252
Észak-Magyarország	329	1 198
Észak-Alföld	744	873
Dél-Alföld	275	674

a) Határozza meg, hogy Magyarországon az összes kereskedelmi szálláshelyen töltött vendégéjszakának hány %-át foglalták el külföldiek! b) Készítsen oszlopdiagramot a hét régióban a külföldiek és a belföldiek által eltöltött vendégéjszakákról! c) Milyen lényeges különbségek olvashatók ki a táblázatból, illetve az oszlopdiagramokból?

15.

Magyarország népességének korcsoportok szerinti megoszlását mutatja a táblázat 2000. január 1-jén.

- a) Készítsen oszlopdiagramot a férfiak és a nők korcsoport szerinti megoszlásáról!
b) Ábrázolja diagramon a férfi-, illetve nőtöbbséget az egyes korcsoportokban!
c) Kördiagramon mutassa be az összlakosság nemek szerinti százalékos megoszlását!

korcsoport (év)	férfi (ezer fő)	nő (ezer fő)
0–9	565	537
10–19	649	621
20–29	825	789
30–39	646	633
40–49	758	788
50–59	589	670
60–69	414	574
70–79	271	469
80–89	68	150
90–	7	20

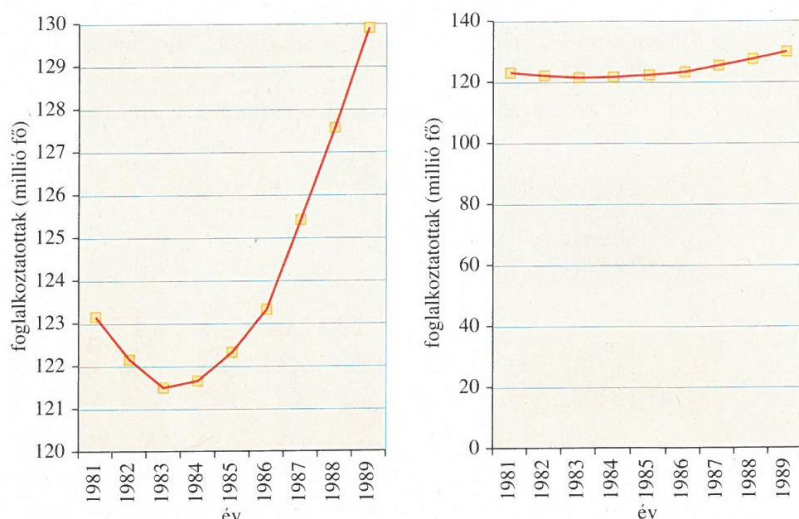
16.

A következő táblázat egy egészséges csecsemő átlagos energiaszükségletét adja meg egyéves korig.

- a) Ábrázolja vonaldiagramon az adatokat!
b) Számítsa ki az energiaszükséglet átlagát, szórását és mediánját!
c) Vizsgálja meg, van-e a szereplő számsokaságnak módusza, s ha van, akkor hány!
d) Mekkora egy csecsemő energiaszükségletének átlagos havi változása?

életkor (hónap)	energia (kcal/kg/nap)
0	124
1	116
2	109
3	103
4	99
5	96,5
6	95
7	94,5
8	95
9	99
10	100
11	104,5

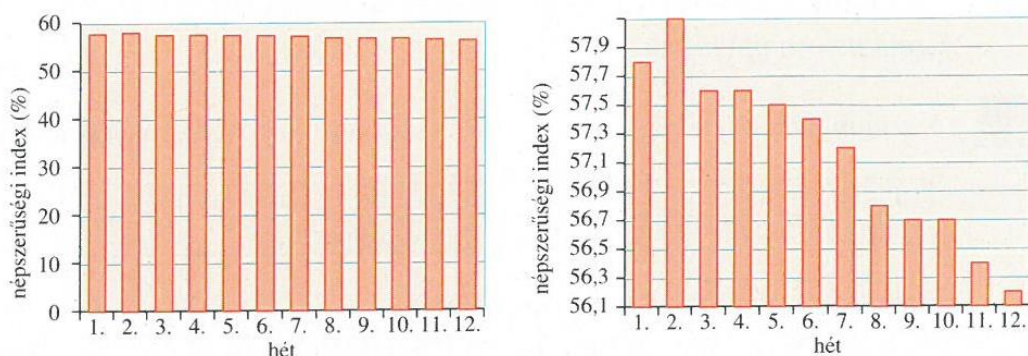
17.



Mindkét diagram ugyanannak a táblázatnak az adatait szemlélteti.

- Foglalja táblázatba az 1981-1989-es években az EKG országaiban foglalkoztatottak számát!
- Vázoljon röviden két konkrét helyzetet, amelyben az első, illetve a második diagramot megtévesztő szándékkal lehet felhasználni!

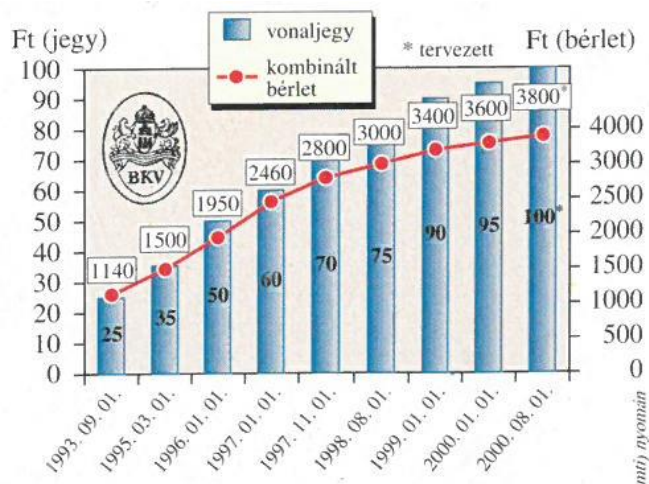
18. Zsergúliában egy kormánypárti vezető politikus népszerűségi indexének az utolsó 12 heti alakulását mutató diagramot jelentetett meg egy kormánypárti és egy ellenzéki napilap, és mindkettő rövid kommentárt is fűzött az adatok alakulásához.



- Mi az előnye, illetve hátránya a bemutatott diagramoknak a 12-elemű adathalmaz értékelése szempontjából?
- Írjon rövid kommentárt az egyes diagramokhoz a politikust támogató kormánypárti, illetve öt támadó ellenzéki lap tudósítójaként!

19. Készítsen a változásokat szándékosan kiemelő, illetve lekicsinyítő diagramokat a bal oldali táblázat adatai alapján! Fűzzön „kommentárt” az elkészített diagramokhoz!

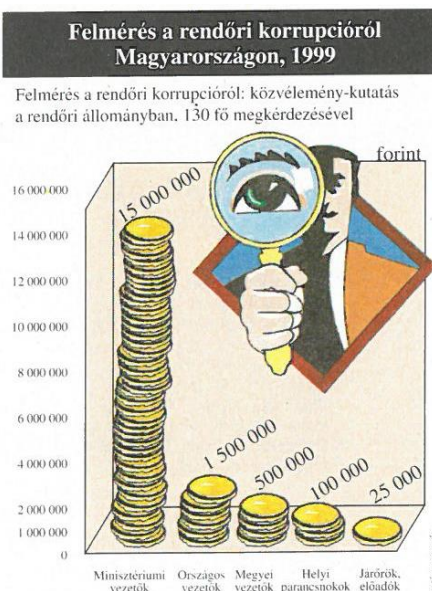
év	élveszületek száma X országban (ezer fő)
1989	86,4
1990	90,9
1991	93,9
1992	94,8
1993	90,1
1994	89,2
1995	87,4
1996	87,0
1997	86,5
1998	87,4
1999	88,8
2000	90,5
2001	93,8



20. Egy napilapban jelent meg a jobb oldali ábra a BKK jegy-, illetve bérletárainak változását szemléltetve.

- Olvassa le a jegy-, illetve a bérletárak alakulását, és adja meg táblázatos formában, feltüntetve az időt is!
- Mi a probléma a vízszintes tengellyel?
- Milyen hamis képet sugall a bérletárak vastag vonala?
- Helyes-e a két grafikon egyben megadása, és megfelelőek-e az arányaik?

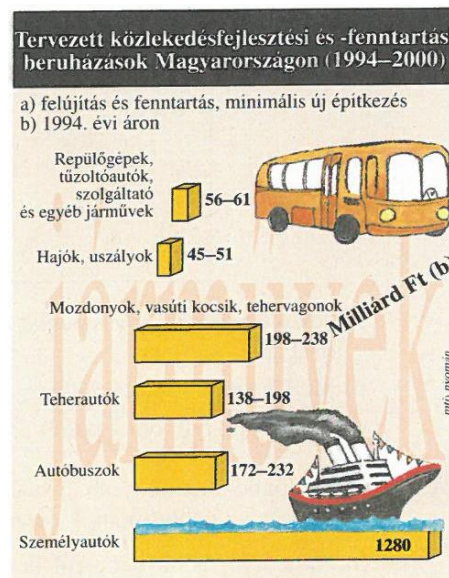
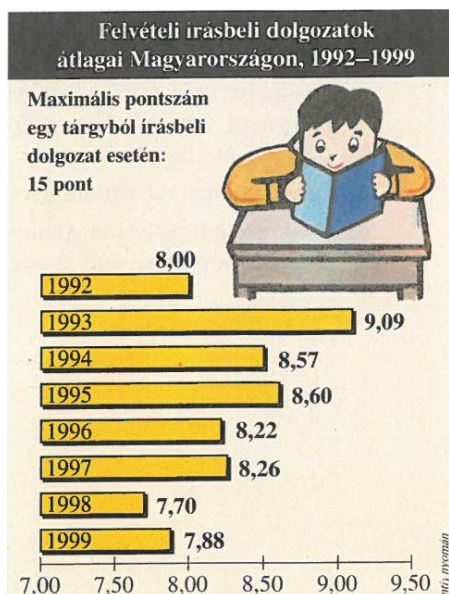
21. a) Mit tud leolvasni a bal oldali grafikonról? b) Sorolja fel az ábrázolás legalább három (nem tartalmi, hanem formai, illetve numerikus) hibáját! c) Készítsen egy korrekt ábrát! d) Mekkora volt az EU-tagállamokban az átlagos egy főre jutó cigarettafogyasztás?



22. A rendőri korrupcióról készült felmérést mutatja a jobb oldali ábra.

- Mit ábrázolhat ez a grafikon? Milyen ismeretek kellenének még az értelmezéshez?
- Sorolja fel az ábrázolás legalább két (nem tartalmi, hanem formai, illetve numerikus) hibáját!

23. A bal oldali grafika az írásbeli felvételikén elért átlagos pontszám változásait mutatja 1992-től 1999-ig. a) Miért félrevezető ez az ábrázolás? b) Ábrázolja ugyanezeket az adatokat helyesen! c) Miért nem mondanak túl sokat egy felvételizőnek ezek az adatok?



24. A jobb oldali diagram a tervezett közlekedésfejlesztési és -fenntartási beruházásokat mutatja 1994-es árakon.

- a) Mutasson be az ábrázolás hibái közül legalább hármat!
b) Készítsen a megtalált hibáktól mentes grafikus szemléltetést!

25. A 12. M osztály utolsó matematika-dolgozatának eredményei:

osztályzat	5	4	3	2	1
gyakoriság	1	3	6	11	4
relatív gyakoriság					

- a) Töltse ki a relatív gyakoriság sorát!
b) Ábrázolja az osztályzatok relatív gyakoriságát vonaldiagrammal!

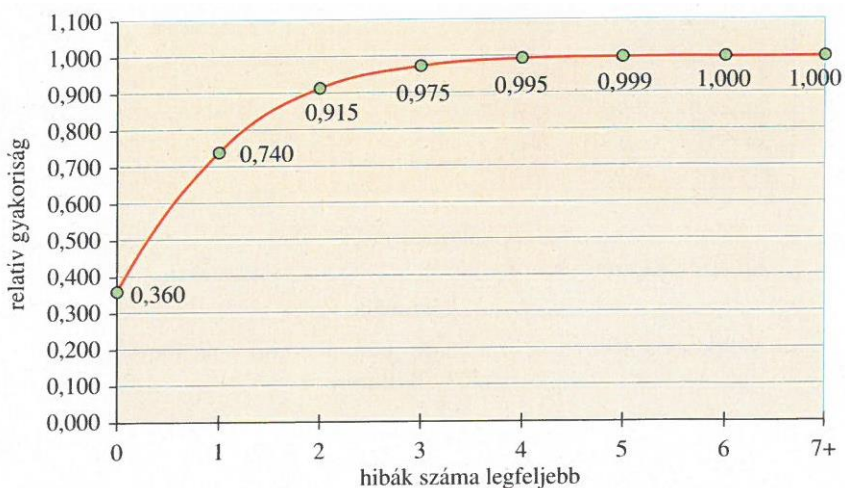
- c) Határozza meg a dolgozatokkal elért osztályzatok móduszát és mediánját!
d) Milyen statisztikai jellemzőkkel és hogyan érvelne a következő állítás mellett? Ez a dolgozat elég gyengén sikerült.

26. A mellékelt táblázat egy ország munkanélküli lakosainak nemek szerinti megoszlását mutatja, életkor szerinti osztályokba sorolással.

életkor	nő (ezer fő)	férfi (ezer fő)	relatív gyakoriságok a munkanélküli nők között	relatív gyakoriságok a munkanélküli férfiak között
15–24	17,3	13,5		
25–29	15,4	10,9		
30–39	19,3	16,1		
40–49	13,5	14,0		
50–59	11,9	15,2		
60–64	0,4	0,6		

- a) Töltse ki az üres oszlopokat (a relatív gyakoriságokat az adott nemen belül kell számítani két tizedesjegy-pontossággal)!
b) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a nemek szerinti relatív gyakoriságokat diagrammal!

27. Az azonos gyártási feltételek mellett előállított, adott hosszúságú szövetmintákat vizsgáltak meg, összesen ezer darabot. Megállapították, hogy a minták mindegyike legfeljebb 6 szövési hibát tartalmaz, s hogy pl. 915 olyan szövetminta van, amelyik legfeljebb két hibát tartalmaz. A mérésről készült grafikont láthatjuk itt.



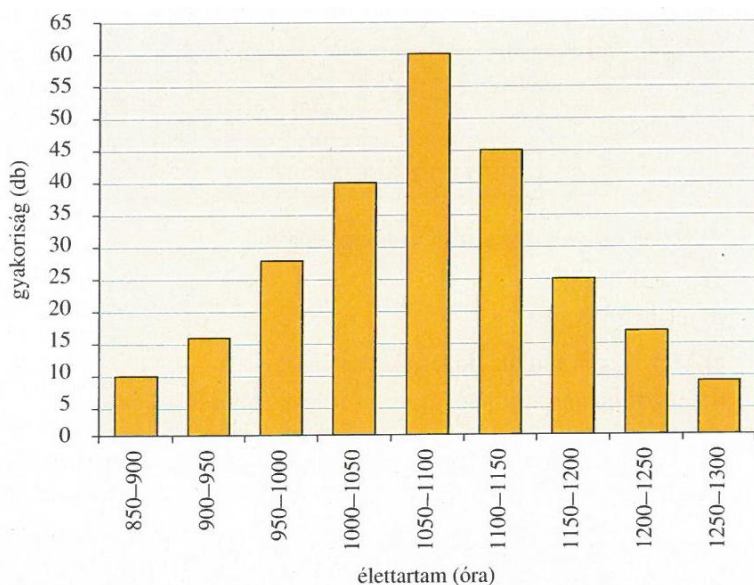
a) Készítsünk olyan vonalgrafikont, amelyik az előfordult hibaszámok (1, 2, 3, 4, 5, 6) relatív gyakoriságát mutatja az ezer mintás halmazban! b) Állapítsuk meg az átlagos hibaszámot!

28. Izzók élettartamát vizsgálva a 250 elemű véletlen mintára a következő oldalon látható diagram szerinti eloszlást tapasztalták.

a) Készítse el a diagramhoz tartozó gyakorisági táblázatot!

b) Mennyi egy véletlenszerűen választott izzó várható élettartama? (Az osztályközepesekkel – vagyis az intervallumhatárok számtani közepével – számoljon!)

c) Töltse ki a mellékelt táblázatot és ábrázolja a kapott értékeket vonaldiagramon!



Az izzó élettartama legfeljebb (óra)	relatív gyakorisága
900	
950	
1000	
1050	
1100	
1150	
1200	
1250	
1300	

29. Egy bizonyos növényfajtából 100 termést vizsgáltak meg abból a szempontból, hogy hány magot (szemet) tartalmaznak. A következő táblázat mutatja az eredményt:

magszám	0	1	2	3	4	5	6	7	8
gyakoriság	2	1	3	9	19	26	21	12	7

a) Készítsen gyakorisági diagramot a magok számáról! b) Adja meg az átlagos magszámot!

c) Mekkora a magszám mediánja, módusza?

30. Egyszer egy Szólia órán egy röpdolgozat munkaidejét feljegyezte a tanár. A kezdéstől a beadásig a következő percre kerekített eredményeket jegyezte fel, az adatok osztályozása után:

munkaidő (perc)	10–14	15–16	17	18	19–21	22
tanulók száma	5	7	4	7	6	1

a) Becsülje meg az átlagos munkaidőt! b) Számolja ki a „pontos” átlagot, ha az osztályba sorolás előtti eredmény a következő táblázatban olvasható:

munkaidő (perc)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
tanulók száma	1	0	2	0	2	4	3	4	7	1	4	1	1

c) Rajzoljon fel hisztogramot az első táblázat alapján!

31. Egy osztály leánytanulói tornaórán távolugrásban az alábbi eredményeket érték el (méterben).

Kerekítse az adatokat egy tizedes pontosságra, és készítse el az így kapott adatok gyakorisági és relatív gyakorisági táblázatát!

3,68	3,32	3,71	3,52	3,47
3,60	3,61	3,89	3,81	3,57
3,65	3,56	3,88	3,52	3,76
3,66	3,59	3,46	3,69	3,71

32. a) Számolja ki a következő 50 tanuló átlagos tesztpontszámát a megadott táblázat alapján:

4	23	35	27	32	15	29	19	25	18	36	11	33	12	6	30	20
24	27	25	16	40	21	35	20	17	9	30	14	29	31	26	23	25
21	32	23	18	26	11	28	43	24	43	24	10	37	22	34	23	

b) Csoportosítsa a teljesítményeket néhány egyenlő szélességű osztályba, és adja meg a gyakorisági diagramot!

c) Az osztályok alapján is számoljon átlagot (ilyenkor az osztály középértéket szorozza a tagok számával), s indokolja a két átlag (az a)-beli és az itteni) eltérését.

33. A sorozáskor 250 újonc testmagasságát mérték meg, és az eredményekről az alábbi táblázatot készítették.

magasság (cm)	166–170	171–175	176–180	181–185	186–190	191–195
újoncok száma	18	37	60	65	48	22

a) Add meg az adatokhoz tartozó diagramot!

b) Mit lehet mondani az újoncok jellemző, átlagos magasságáról?

c) Számítsd ki a magasságok szórását!

d) A legmagasabb 40 újoncot egy külön szakaszba osztották be. Melyik magasságosztályba tartozik ezen újoncok testmagasságának mediánja?

34. Egy feladatgyűjtemény fejezeteiben az alábbi számú feladat szerepel:

50, 58, 97, 41, 55, 35, 32, 26, 30, 70, 75, 41, 57, 76, 40, 32, 57, 32, 65, 58, 150, 71, 108, 99, 165, 257, 172, 108, 209, 165, 194, 207, 94, 144, 64, 177, 61, 232, 190

a) Sorolja harmincas szélességű osztályokba az adatokat!

b) Ábrázolja diagramon az a)-ban kapott eredményt!

c) Az osztályközepekkel számolva hány feladat szerepel átlagosan egy fejezetben?

d) A feladatgyűjteményben összesen 3894 feladat szerepel. Számítsa ki így egy fejezet átlagos feladatszámát, és hasonlítsa össze ezt a c)-ben kapott eredménnyel!

35. A Mozaik együttes valamely tíz egymást követő koncertjén elhangzott dalok számát mutatja a táblázat. a) Mennyi az eljátszott dalok számának átlaga és mediánja? b)

Melyik adat minek a jellemzésére használható?

J.-klub 17	Cegléd 14	K. Pub 18	A. Gimnázium 17	T. Gimnázium 15
Hotel R. 33	Csillebérc 16	BNV 9	MOM 32	Pilisszentiván 14

36. Paraguayban az ezredfordulón a következő (kerekített) létszámban beszéltek anyanyelvüként az alábbi indián nyelveket:

angaite	2 000	csiripa	10 000	guarani	3 003 000	mbüa	5 000
asuslaj	15 000	guajaki	1 000	kaszkiha	500	szanapana	3 000
csirigvano	100 000	guajkuru	1 000	maszkoj	2 000	terena	25 000

- Rendezze sorba a nyelveket beszélőinek csökkenő létszáma szerint!
- Határozza meg e beszélők létszámának összegét, átlagát, mediánját!
- Magyarázza meg az átlag és a medián nagy eltéréseinek okát!

37. 11 tanuló maxi mim 100 pontos teszteredményei a következők:
100; 100; 100; 63; 62; 60; 12; 12; 6; 2; 0.

- Az egyik tanuló rendkívülinek tartja az eredményt, mert a 47 pont szerinte túlzottan alacsony. Melyik statisztikai jellemzőt választotta a tanuló? b) A tanár szerint a legtöbbször előforduló érték azt mutatja, hogy jó eredmények születtek. Ő melyik jellemzőt választotta érveléséhez?
- Az igazgató azt mondta, hogy a 60 pont nem mondható rendkívülinek. Hogyan érvelhetett az igazgató? d) Hogyan jellemezné a 11 tanuló együttes teljesítményét?

38. Egy 25 fős osztály egyik magyardolgozatának eredményei meglepetést okoztak mindenféle osztályzat előfordult, és mindegyiket pontosan 5 tanuló érte el. Számítsa ki az osztályzatok átlagát, mediánját és szórását!

39. Egy munkahelyen vizsgálták a dolgozók életkorát és fizetését. A 24 dolgozó közül 5 fő 23 éves, 8 fő 26 éves, 6 fő 35 éves, 3 fő 43 éves és 2 fő 51 éves. Ketten keresnek havonta 6000 forintot, hárman 7000-t, heten 9500-at, kilencen 10 ezret, ketten 11 ezret és egy fő 14 ezret.

- Számítsa ki az életkorok átlagát és a fizetések átlagát!
- Jellemezze mindkét adathalmaz szóródását a terjedelemmel és a szórással!
- Az életkorok vagy a fizetések szórnak jobban?

40. Egy újfajta margarint szeretne piacra dobni a NoKoleszt cég. Terméküket többek között úgy is tesztelik, hogy két 12 fős csoportnak bemutatnak sok olyan ételt, amelyet az új margarin felhasználásával készítettek. A tesztalanyok mindegyike egy tíz fokozatú skálán értékeli: 1-től 10-ig adhat pontszámot (magasabb pontszám nagyobb tetszést fejez ki). A pontszámokat mutatja a táblázat.

csoporttag	E csoport	M csoport
1.	5	2
2.	6	8
3.	4	1
4.	7	10
5.	5	1
6.	5	10
7.	6	10
8.	6	9
9.	5	1
10.	6	2
11.	6	2
12.	5	10

- Számítsa ki mindkét csoport esetén az adott pontszámok átlagát. Milyen következtetéseket vonhat le a gyártó cég csupán az átlagpontszám alapján?

- Határozza meg mindkét csoport esetén az adott pontszámok szórását. Ha csak az a)-ban kiszámított két számot és a két szórást hozná a gyártó tudomására, akkor ezek alapján milyen következtetéseket vonhatna le az új termék várható fogadtatásával kapcsolatban?

41. Halastóban a pontyok számát szeretnék megbecsülni. Először megjelölnek 200 pontyot, ezeket visszaeresztik a tóba. Két hét múlva újra kihalásznak 200 pontyot és azt tapasztalják, hogy ezek között 18 megjelölt van. Hogyan becsülhetik meg ennek alapján a pontyállományt?

42. Egy osztályban az egyik matematika-dolgozat átlaga 3,25, a jegyek összege 78 volt. Tudjuk, hogy senki sem írt elégtelen dolgozatot. Legfeljebb hány jeles dolgozat lehetett?

43. Budapesten az

	1997	1998	1999	2000 évben
a csapadék mennyisége	304	644	842	389 mm,
a csapadékos napok száma	104	109	135	104 volt.

Határozza meg

a) a négy éves csapadékmennyiség átlagát és szórását;

b) a csapadékos napok számának átlagát és szórását;

c) hogy az egyes években egy csapadékos napon átlagosan mennyi csapadék hullott!

A csapadékmennyiség átlagát tizedmilliméter-pontossággal adja meg!

(Csapadékos napként azt a napot tüntették fel, amelyen legalább 0,1 mm csapadék hullott.)

44. Egy osztályban mind a 24 tanuló hármas dolgozatot írt. Egy másikban 7 tanuló írt kettes, 10 hármas és 7 négyes dolgozatot, míg egy harmadikban 7 tanuló írt egyes, 8 hármas és 7 ötös dolgozatot. Határozza meg mindhárom esetben a móduszt, az átlagot és a szórást!

45. Az adatok a 30-60 ezer lakosú magyar városok népességét mutatják ezer főben, 2000. január 1-jén. Határozza meg a fenti adatok alapján a móduszt és a mediánt!

város	népesség	város	népesség	város	népesség
Érd	51	Cegléd	36	Mosonmagyaróvár	30
Vác	33	Gödöllő	30	Dunaújváros	55
Pápa	33	Ajka	32	Zalaegerszeg	60
Sopron	54	Szekszárd	35	Nagykanizsa	52
Ózd	39	Eger	57	Kazincbarcika	32
Baja	37	Gyula	33	Kiskunfélegyháza	32
Gyöngyös	33	Orosháza	32	Hajdúböszörmény	31
Szentes	31	Salgótarján	44	Hódmezővásárhely	48

46. Írjon fel úgy 16 számot, hogy csak az 1, 2, 3, 4, 5 számot szerepeltesse, továbbá:

a) a számok átlaga 3,25, mediánja 3, módusza 3 legyen!

b) a számok átlaga 3,375, mediánja 3,5, módusza 4 legyen!

c) Határozza meg mindkét esetben a szórást is!

47. Egy kis iskolában nincsenek párhuzamos osztályok. A 8 osztályban tanulók létszámát mutatja a táblázat. a) Állapítsa meg a létszámok átlagát, mediánját és móduszát!

b) Készítsen oszlopdiagramot!

osztályok	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
létszámok	27	30	32	27	29	27	33	32

48. Costa Rica népességét mutatja a 20. században a következő táblázat (ezer főben). Számítsa ki a tízéves népességszám-növekedések átlagát!

1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
300	400	510	630	750	870	1300	1740	2350	3000

49.

	név	sportág	összes	egyéni	csapat
1.	Gerevich Aladár	vívás	7	1	6
2.	Kárpáti Rudolf	vívás	6	2	4
3.	Kovács Pál	vívás	6	1	5
4.	Egerszegi Krisztina	úszás	5	5	0
5.	Keleti Ágnes	torna	5	4	1
6.	Darnyi Tamás	úszás	4	4	0
7.	Fuchs Jenő dr.	vívás	4	2	2
8.	Kulcsár Győző	vívás	4	1	3
9.	Papp László	ökölvívás	3	3	0
10.	Balczó András	öttusa	3	1	2
11.	Fenyvesi Csaba	vívás	3	1	2
12.	Kabos Endre	vívás	3	1	2
13.	Berczelly Tibor	vívás	3	0	3
14.	Gyarmati Dezső	vízilabda	3	0	3
15.	Kárpáti György	vízilabda	3	0	3
16.	Rajcsányi László	vívás	3	0	3

Balra a legtöbb aranyérmet nyert olimpiai bajnokaink neveit és eredményeiket látjuk az újkori nyári olimpiai játékok első száz évében:

- Számítsa ki a felsorolt sportolók összes olimpiai bajnokságai számának átlagát, szórását, mediánját és móduszát!
- Készítsen az egyéni aranyak sportágankénti megoszlásából kördiagramot!

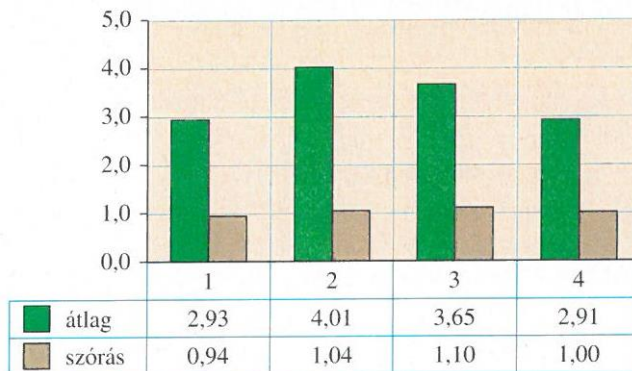
50. A következő 16 adatsor 21 éves hölgyektől származik

magasság (cm)	tömeg (kg)	cipőméret	magasság (cm)	tömeg (kg)	cipőméret
167	59	36	160	55	37
175	66	39	164	57	39
156	60	37	160	62	39
162	52	37	161	69	37
159	54	36	170	57	39
171	55	38	159	53	36
167	52	38	168	68	38
169	78	38	174	60	39

- Mennyi a tömeg mediánja?
- Mi a cipőméret módusza és terjedelme?
- Ábrázolja a magasság-cipőméret pontpárokat koordinátarendszerben, és állapítson meg valamilyen trendet!

a) Számolja ki az átlagos magasságot és ennek a szórását!

51. A 2001-es iskolai matematika írásbeli érettségi jegyek átlaga és szórása aszerint, hogy mi a kedvenc tantárgya a tanulónak (1: elsősorban humán tárgyak; 2: elsősorban reál tárgyak; 3: humán, reál egyaránt van; 4: nincsenek kedvenc tantárgyai). Azt is tudjuk, hogy a válaszok gyakoriság-eloszlása a kb. 32 000 tanuló között: 1: 41%; 2: 18%; 3: 31%; 4: 10%



- A táblázat és a válaszok alapján határozza meg a matematika érettségi országos átlását!
- Melyik csoport teljesít ez alatt, melyik e felett?
- A szórásokat is figyelembe véve fogalmazzon meg állításokat a jegyek és az érdeklődés kapcsolata között, amit támasszon alá a megadott információkkal!

52. Egy kertészeti cég postán elküldte egy növény palántáit, és azt állította, hogy egy év után a növények átlagos magassága 85 cm lesz. 24 növényt egy év után lemértek, és az alábbi adatokat kapták cm-ben. Keresse meg a számtani közepet és a mediánt! Igazolja-e eredményünk a cég állítását?

6	7	7	9	34	56	85	89
89	90	90	91	91	92	93	93
93	94	95	95	96	97	97	99

53. Egy autóakkumulátorokat gyártó cég vezető mérnökének kétféle eljárás közül kell választania. Egy-egy 8-elemű mintát vesz mindkét eljárással gyártott akkumulátorokból, és élettartamukat vizsgálja. Az élettartamok hónapban vannak megadva. Mi az egyes minták számtani közepe és szórása? Melyik eljárást ajánlaná a mérnöknek? Válaszát indokolja is!

A eljárással gyártott	21	24	22	23	25	23	26	20
B eljárással gyártott	23	27	20	22	26	20	27	19

54. Egy élelmiszerbolt helyének kitűzéséhez célszerű felmérni, hogy a vásárlók mekkora távolságot hajlandók gyalog megtenni a lakásuktól az üzletig. Az egyik boltban ezért véletlenszerűen kiválasztottak néhány vevőt és feltették nekik a kérdést. A válaszokat a következő gyakorisági táblázat tartalmazza:

távolság (m)	100	200	300	400	500	600	700	800
gyakoriság	12	15	4	7	3	2	1	1

- Állapítsa meg a minta átlagát, móduszát, mediánját!
- Ábrázolja az adatokat oszlopdiagram segítségével!

55. Egy iskola tanulói kémiaversenyre készülnek. A szaktanár a három legjobb eredményt elérő tanulót jelölte a versenyre. András, Zoli és Béla a következő eredményeket érte el kémiából:

	András	Zoli	Béla
felelet	5; 5; 5; 5; 4; 4	5; 5; 4; 4; 4	5; 5; 5; 5
dolgozat	5; 4	5; 5	5; 3

- Számítsa ki a tanulók jegyeinek átlagát, ha az írásbeli dolgozatok jegyeit hárommal súlyozzuk!
- Állítsa sorrendbe a három tanulót a jegyek fenti átlaga alapján!

56. Egy csoport matematika-dolgozatainak eredményei a következők. Számítsa ki az egyes dolgozatok átlagát és szórását!

osztályzatok	1	2	3	4	5
1. dolgozat	3 db	6 db	3 db	2 db	2 db
2. dolgozat	1 db	5 db	4 db	4 db	2 db
3. dolgozat	5 db	3 db	2 db	3 db	3 db

57. Egy osztály tanulóinak otthonról az iskolába való megérkezéséig átlagosan az alábbi (percekben mért) időre van szükségük:

11	17	45	55	12	27	3	18	10
15	13	18	5	15	16	40	34	25
23	15	10	12	27	15	22	27	2

- Adja meg a legtöbb és a legkevesebb időt felhasználó tanuló idejének különbségét!
- Határozza meg az adathalmaz mediánját!

c) Sorolja 10 perc szélességű osztályokba az adatokat! Melyik osztályban van a legtöbb elem?

58. Egy vállalat dolgozói körében az ezer forintban megadott havi bruttó bérek az alábbi gyakorisággal fordulnak elő:

havi bér	65	72	80	115	188
gyakoriság	8	5	4	2	1

- Határozza meg a havi bérek szóródási mutatóit (terjedelem, átlagos abszolút eltérés, szórás)!
- Hogyan változnak a szóródási mutatók, ha minden dolgozó bérét 12 000 Ft-tal megemelik?
- Hogyan változnak a szóródási mutatók, ha minden dolgozó bérét 10%-kal meg-emelik?

59. Két fiúcsapatnak egy magasugróversenyen elért eredményeit mutatja a táblázat. a) Értékelje statisztikai mutatók segítségével mindkét csapat teljesítményét külön- külön! b) Hasonlítsa össze a két csapat teljesítményét! Melyiket tartja jobbnak és miért?

cm	Szöcskék (fő)	Brekik (fő)
120	3	3
125	4	2
130	2	1
135	0	0
140	1	0
145	0	2

60. Ön egy focicsapat egyik vezetőjeként új kapust keres. Végül két jelölt marad: X és Y, akik között dönteni kell.

- a) Az utolsó tíz mérkőzésen X összesen 20 gólt kapott, Y pedig 25-öt. Hogyan döntene és miért?
b) Később az is kiderül, hogy az egyes meccseken hány gólt kaptak a jelöltek:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
X	2	1	3	1	1	2	2	3	2	3
Y	4	5	2	4	6	2	1	0	0	1

Megváltoztatja vagy megerősíti előző döntését?

61. Egy kosárlabdacsapat két büntetődobójának eredményességét az alábbi statisztika mutatja: A: 242 büntetőből 176 sikeres; B: 504 büntetőből 328 sikeres.

- a) Melyikükkel dobatná a büntetőt, ha más információ nem áll rendelkezésre (pl. pillanatnyi forma, idegállapot stb.)?
b) Mekkora eséllyel dob be öt büntetőt egymás után az A, illetve a B játékos?

62. Egy nem feltétlenül különböző pozitív egészekből álló számsokaságban egyszer szerepel a 68 is. A számsokaság átlaga 56. Ha azonban a 68-at kihagyjuk a sokaságból, akkor az átlag 55-re csökken. Legfeljebb mekkora lehet a számsokaságban szereplő legnagyobb szám?

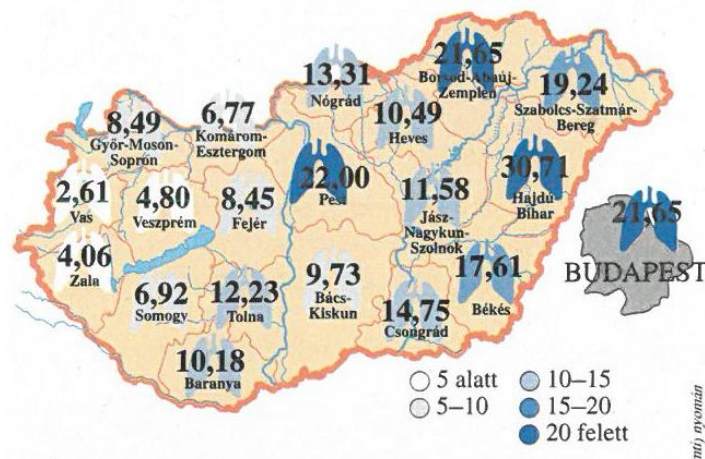
63. Egy 35 fős A osztályban félévkor a következő matematikajegyek születtek:

jegy	1	2	3	4	5
tanulók száma	2	9	11	8	5

- a) Készítsen ábrát az adatokból! Értékelje az osztály eredményét!
b) Hasonlítsa össze ezt az eredményt a párhuzamos B osztályéval, ahová 32 tanuló jár!

jegy	1	2	3	4	5
tanulók száma	0	13	6	3	10

64. „A tbc-helyzet Magyarországon 1999-ben” című cikkhez közzétették a mellékelt ábrát, amelyen a 100 000 lakosra számított betegek számát tüntették fel.



A megyék népességét az alábbi táblázat mutatja (a megyék nevét rövidítettük, a lakosság száma pedig ezer főben értendő):

B-K	Ba	Bé	B-A-Z	Bp.	Cso	Fe	Gy-M-S	H-B	He
531	401	392	729	1815	418	426	424	542	323
J-N-Sz	K-E	Nó	Pe	So	Sz-Sz-B	To	Va	Ve	Za
411	309	216	1032	330	569	244	266	373	293

- Hány tébécés beteg jut 100 000 lakosra az egész országot tekintve?
- Ábrázolja a tébécés betegek számát a hét magyar régió szerinti bontásban!
- Melyik régióban a legnagyobb a tébécés betegek abszolút száma, illetve a lakossághoz képesti aránya?

65. Az élveszületések számának összehasonlítására 1930-ban és 1994-ben a következő táblázat készült.

korcsoport	ezer nőre jutó élveszületések száma	
	1930	1994
15–19	40,9	33,6
20–24	158,5	113,9
25–29	151,8	110,3
30–34	110,7	50,2
35–39	74,8	17,2
40–44	15,7	2,0

- Hány százalékkal csökkent az ezer nőre jutó élveszületések száma 1930-hoz képest 1994-ben?
- Milyen adatok kellenének ahhoz, hogy meg tudjuk mondani a tényleges születések számának változását 1930 és 1994 összehasonlításában? Előfordulhat, hogy 1994-ben több gyermek született, mint 1930-ban?

Tartalom

I. Az n-edik gyök	1
II. Exponenciális és logaritmikus világ	3
III. Trigonometria	15
IV. Sorozatok	26
V. Sorozatok határértéke	37
VI. Az egyenes koordinátageometriája	45
VII. Függvények határértéke és folytonossága	53
VIII. A kör és a parabola koordinátageometriája	61
IX. Valószínűségszámítás	69
X. Statisztika	79

